现代应用数学丛书

力学系与映射理论

〔日〕岩田義一 著

上海科学技术出版社

统一书号 13119·46
定　　价 0.34 元

现代应用数学丛书

力学系与映射理论

〔日〕岩田義一 著
孙 澤 瀛 譯
吳 光 磊 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的现代应用数学丛书之一的中譯本。介紹了关于力学系的两种变换的理論，共分两章。第1章介紹典型变换，第2章叙述完全結錄。可供高等院校数学、力学、物理各专业学生作参考。

现代应用数学丛书

力学系与映射理论

原 书 名　力学系と写像の理論
原 著 者　〔日〕岩 田 義 一
原出版者　岩 波 书 店
譯　　者　孙 澤 瀛
校　　者　吳 光 磊

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业许可証出098号
新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷

开本850×1168 1/32　印張1 26/32　字数41,000
1962年8月第1版　1962年8月第1次印刷
印数 1—4,500

統一书号：13119・467
定　　价：(十四) 0.34元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，面叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

书名	原作者	譯者
代数学	弥永昌吉等	熊全淹
几何学*	矢野健太郎	孙泽瀛
复变函数	功力金二郎	刘书琴
集合·拓扑·測度*	河田敬义	賴英华
泛函分析*	吉田耕作	程其襄
广义函数*	岩村联	楊永芳
常微分方程	福原满洲雄	張庆芳
偏微分方程*	南云道夫	錢端壮
特殊函数*	小谷正雄等	錢端壮
差分方程	福田武雄	繆鴻基
富里哀变换与拉普拉斯变换*	河田龙夫	錢端壮
变分法及其应用*	加藤敏夫	周怀生
李群論*	岩堀长庆	孙泽瀛
随机过程*	伊藤清	刘璋温
同轉群与对称群的应用	山内恭彦等	張质贤
結晶統計与代数	伏見康治	孙泽瀛
偏微分方程的应用	犬井鉄郎等	楊永芳
微分方程的近似解法	加藤敏夫等	王占瀛
数值計算法	森口繁一等	閻昌龄
量子力学中的数学方法*	朝永振一郎	周民强
工程力学系統*	近藤一夫等	刘亦珩
非綫性振动論	古屋茂	吕淑明
力学系与映射理論*	岩田义一	孙泽瀛
平面彈性論*	森口繁一	刘亦珩
有限变位彈性論 变形几何学*	山本善之 近藤一夫	刘亦珩
塑性論*	鷲津久一郎	刘亦珩
粘性流体理論*	谷一郎	刘亦珩
可压縮流体理論*	河村龙馬	刘亦珩
网絡理論	喜安善市等	陆志刚
自动控制論	喜安善市等	翟立林
回路拓扑学	近藤一夫	張鳴鏞
信息論	喜安善市等	李文清
推断統計理論	北川敏男	李賢平
統計分析*	森口繁一	刘璋温
实驗設計	增山元三郎	刘璋温
群体遺傳学的数学理論*	木村資生	刘祖洞
博奕論	宫澤光一	張鍾俊
綫性規划	森口繁一	刘源張
經济理論中的数学方法	安井琢磨等	談祥柏
随机过程的应用*	河田龙夫	刘璋温
計算技术	高桥秀俊	姚晋
穿孔卡計算机	森口繁一	刘源張

注：有*者已在1962年7月以前出版。

目　　录

第1章 典型变换

§1 Fermat 与 Maupertuis 原理

几何光学是由基本假設，即 Fermat 原理引导出来的。这个原理是：

光从 A' 向着 A 行进时，它是沿着这样的路綫进行的：对于行程中路綫的微小变化，由 A' 到 A 所需的时間不起变化。

設介质的折射率是 n，在介质中光速是 v，真空中光速是 c，则 $n=c/v$. 因此，如設沿着光程的綫素是 ds，那末，从 A' 到 A 所需的时間为

$$\int_{A'}^{A}\frac{ds}{v}=\frac{1}{c}\int_{A'}^{A}n\,ds.$$

如果把中途路綫的微小变化記成 δ，则 Fermat 原理可以写成

$$\delta\int_{A'}^{A}n\,ds=0.$$

在电子光学里，例如說，对于在靜电場內运动着的带电粒子的行程，Maupertuis 原理是成立的。这原理就是，关于具有能量 h 的粒子所走路綫而取的积分

$$\int_{A'}^{A}\sqrt{h-\varphi}\,ds\quad(\varphi\text{ 为粒子的位能}),$$

对于途中路綫的任何微小变化是不变的。

如果考虑这样一种介质，其中的折射率 n 給定为

$$n=\sqrt{h-\varphi},$$

那末，光的行程和粒子的行程完全一致。

不論是位能或折射率，它們一般都是位置的函数。但虽在同一位置，由于光綫的方向不同而折射率也可能不同。具有这种性

质的介质称为各向异性的。例如晶体就是这样的。不具有这种性质的介质称为各向同性的。

光的行程与粒子行程的这种相似性，不过是在物理学史上累次发現的光与粒子的許多相似性中的一种現象而已。但是，如果除去象各向异性的晶体的那些介质不計外，和将光的行程作为粒子的行程来考虑的这种情况相反，磁場中的带电粒子的行程却不能以光来实現。因此，粒子的运动路程是比較具有一般性的，不能完全以光綫的情况来説明，所以下面首先对粒子力学的基本事項加以叙述。

§2 Hamilton 原理

力学系的运动可从 Hamilton 原理导出。設力学系之自由度为 n，配备的 n 个坐标为 $q_1, q_2, \cdots, q_n$，其速度为 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$（· 表示关于时間的微分），时間为 $t \equiv q_0$，力学系的 Lagrange 函数記成 $L(\dot{q}_r, q_r, t)$。这时，Hamilton 原理可叙述如下：

力学系从 $A'(q_\sigma')$ 进到 $A(q_\sigma)$ 时，沿着进行路綫所取的积分

$$\int_{A'}^{A} L\,dt \equiv \int_{A'}^{A} L\,dq_0, \tag{2.1}$$

对于途中路綫的任何微小变化保持不变，但两端 A'，A 作为固定不动的。

如果把 $dq_\sigma(\sigma=0, 1, 2, \cdots, n)$ 当做独立变数看待，那末，Ldq_0 关于这些变数是齐次的 1 次形式。这是因为：$\dot{q}_r(r=1,2,\cdots,n)$ 是 dq_r 和 dq_0 之比，因而，Lagrange 函数关于 dq_σ 是 0 次的齐次式。于是，利用 Euler 关于齐次式的定理，微分形式 $Ldt=Ldq_0 \equiv \omega_d$ 可以写成

$$\omega_d = \sum_{\sigma=0}^{n} dq_\sigma \frac{\partial \omega_d}{\partial dq_\sigma} \equiv dq_\sigma \frac{\partial \omega_d}{\partial dq_\sigma}.$$

这里关于相同下标之总和按照張量写法，把总和符号 Σ 省去，但

在引起混淆时，也把 $\sum$ 添上。当我們把 dq_σ 看成独立变数时，$\partial\omega_d/\partial dq_\sigma$ 是 ω_d 关于 dq_σ 的偏导数，它关于 $dq_\alpha(\alpha=0, 1, \cdots, n)$ 是 0 次的齐次式。把它写做 p_σ，对坐标 q_σ 而言，称做共軛的运动量。用 L, $\dot{q}_r$ 表示則有

$$\left.\begin{aligned}
&p_r=\frac{\partial\omega_d}{\partial dq_r}=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_r}\quad(r=1, 2, \cdots, n),\\
&p_0=\frac{\partial\omega_d}{\partial dq_0}=L-p_r\dot{q}_r,\\
&\omega_d=p_\sigma dq_\sigma=p_r dq_r+p_0 dq_0.
\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

p_0 是对时間 q_0 成共軛的运动量，經变分后的量 $H=-p_0$ 称为能量。这些量 p_r 及 H 和时間因素有特殊的关系，因而它們的形式表現得如上述那样，但由于它們关于 dq_α 是 0 次的齐次式，所以，用其他坐标代替时間，它們的表示仍不变。也就是說，它們是力学系里特有的量。因此，$q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n$（或者把 q_0, p_0 也包含在內）被称为典型变数(canonical variable)。

試从 Hamilton 原理引出力学系的运动方程。設參数为 u 的力学系路綫写成 $q_\sigma=q_\sigma(u)$，微小变化記成 $q_\sigma(u)+\delta q_\sigma(u)$，那末，

$$\begin{aligned}
\delta\int_{A'}^{A}Ldq_0&=\delta\int_{A'}^{A}\omega_d=\delta\int_{A'}^{A}p_\sigma dq_\sigma=\delta\int_{A'}^{A}p_\sigma\frac{dq_\sigma}{du}du\\
&=\int_{A'}^{A}\left(\delta p_\sigma\frac{dq_\sigma}{du}+p_\sigma\frac{d\delta q_\sigma}{du}\right)du \text{[1]}\\
&=\Big[p_\sigma\,\delta\,q_\sigma\Big]_{A'}^{A}-\int_{A'}^{A}\left(\frac{dp_\sigma}{du}-\frac{\partial p_\sigma}{\partial q_\sigma}\frac{dq_\sigma}{du}\right)\delta q_\sigma du\\
&=\omega_\delta(A)-\omega_\delta(A')-\int_{A'}^{A}\left(\frac{dp_\sigma}{du}-\frac{\partial}{\partial q_\sigma}\frac{\omega_d}{du}\right)\delta q_\sigma du.
\end{aligned}\tag{2.3}$$

Hamilton 原理指的是，对于固定了两端（即 $\omega_\delta(A)=\omega_\delta(A')=0$）

[1] 假定参数 u 是这样选取的，其上下限在变分过程中保持不变，故 $\delta\int f du=\int\delta f du$。——校者注

的任意微小变化 δq_σ ($\sigma=0, 1, \cdots, n$)，上式等于0. 因此，运动方程可写成

$$\frac{dp_\sigma}{du}-\frac{\partial}{\partial q_\sigma}\frac{\omega_d}{du}=0 \quad (\sigma=0, 1, \cdots, n). \tag{2.4}$$

如以 $u=t$，就得普通所采取的形式，即所謂 Lagrange 的运动方程。但这对我們說来并不重要。重要的是 $\int_{A'}^{A}\omega_d$ 这样一个积分，对于实际可能的路綫而論，它是两端 A', A 的坐标的函数，和途中的路綫无关。这是由于对满足运动方程的路程来讲，由(2.3)，有

$$\delta\int_{A'}^{A}\omega_d=\omega_\delta(A)-\omega_\delta(A').$$

因此，这个积分之值作为两端 A', A 的函数可写成

$$S(A, A')=\int_{A'}^{A}\omega_d. \tag{2.5}$$

不用 Lagrange 的 n 个运动方程，而只用一个函数 S 来研究力学系以及光学系里的路綫問題，这正是 Hamilton 原来的动机。这个 S 就称做 Hamilton 的主函数。

从(2.5)得到

$$dS=\omega_d(A)-\omega_d(A')=p_\sigma dq_\sigma-p'_\sigma dq'_\sigma, \tag{2.6}$$

再由(2.6)又得出如下的关系

$$\frac{\partial S}{\partial q_\sigma}=p_\sigma, \quad \frac{\partial S}{\partial q'_\sigma}=-p'_\sigma \quad (\sigma=0, 1, 2, \cdots, n). \tag{2.7}$$

当 $\dot{q}_r$ ($r=1, 2, \cdots, n$) 可用 q_r, p_r 表示时，則 $-p_0=H(q_r, t, \dot{q}_r)$ 得用 q_r, p_r 表示而記成 $H(q_r, t, p_r)$，在(2.7)中以 $\sigma=0$, 就有

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-H(q_r, t, p_r), \quad \frac{\partial S}{\partial t'}=H(q'_r, t', p'_r). \tag{2.8}$$

从这里把 p_r, p'_r 消去，于是得到 S 所应满足的方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_r, t, \frac{\partial S}{\partial q_r}\right)=0, \quad \frac{\partial S}{\partial t'}-H\left(q'_r, t', -\frac{\partial S}{\partial q'_r}\right)=0. \tag{2.9}$$

上式称为 Hamilton-Jacobi 的偏微分方程。式中的 $H(q_r, t, p_r)$ 称为 Hamilton 函数或 Hamiltonian. Hamilton 函数 $H(q, t, p) = p_r\dot{q}_r - L(q, t, \dot{q})$ 关于 p_r 偏微分时,有

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \dot{q}_r + p_s\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial p_r} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial p_r} = \dot{q}_r,$$

再由 (2.4), 把 t 取作独立变数,得

$$\dot{p}_r = \frac{\partial L}{\partial q_r} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}.$$

把这两組合并在一起,

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \quad (r = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.10}$$

称为 Hamilton 的典型方程 (canonical equations)。

如果利用微分形式 $\omega_d = p_r dq_r - H dt$, 則运动方程可写成更对称的形式

$$\delta\omega_d - d\omega_\delta = 0. \tag{2.11}$$

这里的 d 是沿着路綫进行的微分, δ 是和 d 可换的任意变分。上式之所以能够这样写,实际进行計算就可看出。

$$\delta\omega_d - d\omega_\delta = \delta p_r dq_r + p_r\delta dq_r - \delta H dt - H\delta dt$$
$$- dp_r\delta q_r - p_r d\delta q_r + dH\delta t + H d\delta t,$$

由于 d 和 δ 是可换的, $\delta dq_r = d\delta q_r$, $\delta dt = d\delta t$, 因此, 等式的右边

$$= \delta p_r dq_r - dp_r\delta q_r - \delta H dt + dH\delta t$$
$$= \delta p_r\left(dq_r - \frac{\partial H}{\partial p_r}dt\right) - \delta q_r\left(dp_r + \frac{\partial H}{\partial q_r}dt\right)$$
$$+ \delta t\left(dH - \frac{\partial H}{\partial t}dt\right).$$

前面两个括弧中的項沿着路綫应等于 0, 后一括弧中的項

$$dH - (\partial H/\partial t)dt$$

就是 (2.4) 的左边以 $\sigma = 0$, 因此,也等于 0. 于是,运动方程可以写成 (2.11)。一般讲来, 从一个微分形式 $\Omega_d = y_r dx_r$ 所得的 $\delta\Omega_d$

$-d\Omega_\delta$ 称为 Ω_d 的外微分。如果 Ω_d 是全微分，則其外微分等于0.

§3 典型变换

上节的(2.6)里，如把时間 t', t 当作固定的，则可得如下关系

$$p_r dq_r - p'_r dq'_r = dS(q, q').$$

q_r, p_r 是在时刻 t 的典型变数; q'_r, p'_r 是在时刻 t' 的典型变数。对这式作它的外微分，消去了 S 而得到不变的双綫性形式

$$dq_r \delta p_r - dp_r \delta q_r = dq'_r \delta p'_r - dp'_r \delta q'_r. \tag{3.1}$$

从一組变数 $(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n)$ 变到另一組变数 $(q'_1, \cdots, q'_n, p'_1, \cdots, p'_n)$ 的变換满足(3.1)时，一般地称之为典型变換。这种变換的微分，就是下列形式的綫性变換:

$$dq'_r = \frac{\partial q'_r}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial q'_r}{\partial p_j} dp_j, \quad \delta q'_r = \frac{\partial q'_r}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial q'_r}{\partial p_j} \delta p_j,$$
$$dp'_s = \frac{\partial p'_s}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial p'_s}{\partial p_j} dp_j, \quad \delta p'_s = \frac{\partial p'_s}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial p'_s}{\partial p_j} \delta p_j,$$

它必須使双綫性形式(3.1)不变。

使得两个向量 $(x_1, \cdots, x_n, x_{1'}, \cdots, x_{n'})$, $(y_1, \cdots, y_n, y_{1'}, \cdots, y_{n'})$ 的反称积(skew product)

$$[xy] = x_r y_{r'} - x_{r'} y_r \tag{3.2}$$

不变的綫性变換

$$x_\rho \to {}'x_\rho = a_{\rho\sigma} x_\sigma, \quad y_\rho \to {}'y_\rho = a_{\rho\sigma} y_\sigma$$
$$(\rho, \sigma = 1, 2, \cdots, n, 1', \cdots, n')$$

称为綫从[1]变換或辛变換(symplectic transformation)，这是和直交变換同样重要的变換。

如果把 $(dq_1, \cdots, dp_n)$, $(\delta q_1, \cdots, \delta p_n)$ 看成两个向量，那末，典型变換是使它們的反称积(3.1)不变的变換，因此，也是辛变換。

[1] 德文为 Xonoplax，意指綫从(linecomplex)，原作者誤解为"复素"。——校者注

如把$(x_1, \cdots, x_n, x_{1'}, \cdots, x_{n'})$当作列向量$x$再取$2n$阶矩陣

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

这里0，1分别表示n阶的0矩陣与n阶的单位矩陣，那末，有

$$[xy]=x^*Jy.$$

符号*意味着行与列互換。因此，$'x=Ax$，$'y=Ay$ 里的 $A=(a_{\rho\sigma})$ 是辛变换就等价于

$$A^*JA=J. \tag{3.3}$$

将(3.3)两边作其行列式，由于$|J|=1$（$|\ |$表示行列式），所以 $|A|^2=1$。从而$|A|$等于1或-1。从以下的說明我們将看出$|A|=1$。

設$x^1, x^2, \cdots, x^{2n}$为$2n$个独立的向量，即$Ax^\sigma='x^\sigma$，如把x^σ作为列元素的行列式記成$|x^1, x^2, \cdots, x^{2n}|$，則

$$|'x^1, \cdots, 'x^{2n}|=|A|\cdot|x^1, \cdots, x^{2n}|.$$

另一方面，关系

$$|x^1, \cdots, x^{2n}|^*\cdot|J|\cdot|x^1, \cdots, x^{2n}|=|[x^\rho x^\sigma]|$$

是成立的。这里的$|[x^\rho x^\sigma]|$是以反称积为元素的行列式。式子的左边由于$|J|=1$，所以等于$|x^1, \cdots, x^{2n}|$的平方。但由行列式論的定理，偶数次的反称行列式等于其元素之多項式的平方。因而，从$[x^\rho x^\sigma]=-[x^\sigma x^\rho]$知$|[x^\rho x^\sigma]|$等于反称积之多項式的平方。于是$|x^1, \cdots, x^{2n}|$是反称积的多項式，在辛变换下是不变的。这意味着$|'x^1, \cdots, 'x^{2n}|=|x^1, \cdots, x^{2n}|$。因此，$|A|=1$。更从此推知$A$的特征值之积等于1。

从(3.3)得

$$A^*=JA^{-1}J^{-1},$$

于是，A^*因而A具有和A^{-1}相同的特征值。从此知道，如果A的一个特征值是λ，則λ^{-1}也是它的特征值。由于特征值全部的乘

积等于 1，所以 A 的特征值可以写成 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda_1^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1})$。这桩事实对于检查加速装置中粒子行程的稳定性等是一项重要的性质。

所謂 $|A|=1$，指的是由变数 q_r, p_r 变到 q'_r, p'_r 的变换之行列式即 Jacobian 等于 1。

当 q_r, p_r 含有两个参数 u, v 时，如果关于 u 的变分記作 d，关于 v 的变分記成 δ，从(3.1)我們知道

$$(u, v)=\frac{\partial q_r}{\partial u}\frac{\partial p_r}{\partial v}-\frac{\partial p_r}{\partial u}\frac{\partial q_r}{\partial v}$$

仍旧是一个不变式。称为 Lagrange 括弧。这是两个向量 $(\partial q_r/\partial u, \partial p_r/\partial u)$，$(\partial q_r/\partial v, \partial p_r/\partial v)$ 的反称积。一个函数 $F(q, p)$ 之全微分

$$dF=\frac{\partial F}{\partial q_r}dq_r+\frac{\partial F}{\partial p_r}dp_r=dq_r\frac{\partial F}{\partial q_r}-dp_r\left(-\frac{\partial F}{\partial p_r}\right)$$

是不变量。所以，可把它看成是两个向量 (dq_r, dp_r) 与 $(-\partial F/\partial p_r, \partial F/\partial q_r)$ 的反称积。因此，对辛变换而論，$(-\partial F/\partial p_r, \partial F/\partial q_r)$ 是和 (dq_r, dp_r) 一样受到同样变换的向量。更由一个函数 $G(q, p)$ 作向量 $(-\partial G/\partial p_r, \partial G/\partial q_r)$，作两向量之对称积

$$[F, G]=\frac{\partial F}{\partial q_r}\frac{\partial G}{\partial p_r}-\frac{\partial F}{\partial p_r}\frac{\partial G}{\partial q_r},$$

它也是一个不变量。称为 Poisson 括弧。对于某一时刻的典型变数作 Lagrange 括弧或 Poisson 括弧，这些量是和时間无关的不变量。

§4　典型变换的表示法

在自由度 1 的情况下，变换 $q, p \to q', p'$ 如满足

$$dq\delta p-dp\delta q=dq'\delta p'-dp'\delta q',$$

那末，它是一个典型变换。假使 q, p 取作直交坐标时，上式就意味着微小面积不变。虽說，象

$$q' = \sqrt{2q}\cos p,\ \ p' = \sqrt{2q}\sin p$$

就是上述的那种变换，但对于一般的典型变换$(q_r,\ p_r) \to (q'_r,\ p'_r)$，把$q'_r,\ p'_r$作为$q_r,\ p_r$的函数的一般表示法还不知道。

适当地取独立变数，对双綫性形式(3.1)进行积分試試看。

1）首先把$q_r,\ q'_r$取作独立变数，从(3.1)有

$$\delta(p_r dq_r) - d(p_r \delta q_r) = \delta(p'_r dq'_r) - d(p'_r \delta q'_r),$$

于是得

$$\delta(p_r dq_r - p'_r dq'_r) = d(p_r \delta q_r - p'_r \delta q'_r).$$

这意味着微分形式$p_r dq_r - p'_r dq'_r$是全微分。因此，以

$$p_r dq_r - p'_r dq'_r = dV(q,\ q'),$$

这时因$q_r,\ q'_r$是互相独立的，所以得到

$$p_r = \frac{\partial V}{\partial q_r},\ \ p'_r = -\frac{\partial V}{\partial q'_r}\ \ (r=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{4.1}$$

2）其次把$q_r,\ p'_r$取作独立变数。这时有

$$\delta(p_r dq_r) - d(p_r \delta q_r) = d(q'_r \delta p'_r) - \delta(q'_r dp'_r),$$

于是，得

$$\delta(p_r dq_r + q'_r dp'_r) = d(p_r \delta q_r + q'_r \delta p'_r).$$

这説明$p_r dq_r + q'_r dp'_r$是全微分，把它写成$dU(q,\ p')$，就得到

$$p_r = \frac{\partial U}{\partial q_r},\ \ \ q'_r = \frac{\partial U}{\partial p'_r}. \tag{4.2}$$

为什么要这样地把独立变数变来变去来表示典型变换？原因如下：在典型变换$(q_r,\ p_r) \to (q'_r,\ p'_r)$里，眞正应該看成独立变数的是$(q_r,\ p_r)$或$(q'_r\ p'_r)$，但用了它們，(3.1)就无法进行簡单的积分。正由于这个原因，所以把独立变数选定为$q_r,\ q'_r$等。虽說是这样，但在一般的典型变换里，q_r与q'_r并不一定是独立的。事实上，存在着这样的典型变换，q'_r是$q_1,\ \cdots,\ q_n$的函数。例如說，所謂点变换的

$$q'_r = q'_r(q_1,\ \cdots,\ q_n),$$

$$p'_r = p_s \frac{\partial q_s}{\partial q'_r},\ \ 或\ \ p_s = p'_r \frac{\partial q'_r}{\partial q_s},$$

这时 q'_r 不能看成是和 q_r 独立的变数。因此，如(4.1)那样的表示方法是不可能的。如果使用(4.2)的表示方法，则取 $U(q, p')=p'_r q'_r(q)$ 就行了。是不是(4.1)与(4.2)两种表示方法就夠了呢？那还不能說是足夠的。总之，如果 (q_r, q'_r) 或 (q_r, p'_r) 之变数間有着函数关系时，那就不能不使用其他的表示方法。

在(3.1)中出現了 $4n$ 个变数。这 $4n$ 个中不具乘积形式的 $2n$ 个变数取作独立变数时，则(3.1)是可以积分的。q_r, p_r 虽出現在 $dq_r\delta p_s$ 这样的乘积形式内，但对于 q_r, q'_r 或 q_r, p'_r 而論，$dq_r\delta q'_s$ 或 $dq_r\delta p'_s$ 这样的項不存在。这样地取独立变数的方式是数目无限的，但由于典型变数的变换行列式必須等于1，所以存在着一个限制。例如說采取(4.1)的表示方法时，则必有如下的关系

$$\frac{\partial(q'_r, p'_r)}{\partial(q_r, p_r)}=\frac{\partial(q'_r, p'_r)}{\partial(q'_r, q_r)}\Big/\frac{\partial(q_r, p_r)}{\partial(q'_r, q_r)}$$

$$=\frac{\partial(p'_r)}{\partial(q_r)}\Big/(-1)^n\frac{\partial(p_r)}{\partial(q'_r)}=1.$$

这里的写法 $\partial(p'_r)/\partial(q_r)$ 是这样的：$\partial(p'_r)/\partial(q_r)\equiv\partial(p'_1, \cdots, p'_n)/\partial(q_1, \cdots, q_n)$。要这式具有一定的意义，则分母与分子不能等于0是必要的。从而就有

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial q'_r\partial q_s}\right|\neq 0.$$

对于(4.2)的表示方法，同样的限制

$$\left|\frac{\partial^2 U}{\partial q_r\partial p'_s}\right|\neq 0$$

是必要的。

除上述两种表示方法外，还有两种表示方法。

3) 取 $(q_r+q'_r)/2=u_r$, $(p_r+p'_r)/2=v_r$ 作为独立变数，更以

$$q_r-q'_r=2f_r,\ p_r-p'_r=2g_r,$$

则(3.1)变为

$$du_r\delta g_r-dg_r\delta u_r=dv_r\delta f_r-df_r\delta v_r.$$

从此有

$$\delta(g_r du_r - f_r dv_r) = d(g_r \delta u_r - f_r \delta v_r),$$

因而，$g_r du_r - f_r dv_r$ 是一个全微分，写成

$$g_r du_r - f_r dv_r = dF(u, v).$$

因此，可得

$$g_r = \frac{\partial F}{\partial u_r}, \quad f_r = -\frac{\partial F}{\partial v_r},$$

以及

$$\left.\begin{aligned} q_r &= u_r - \frac{\partial F}{\partial v_r}, \quad q'_r = u_r + \frac{\partial F}{\partial v_r}, \\ p_r &= v_r + \frac{\partial F}{\partial u_r}, \quad p'_r = v_r - \frac{\partial F}{\partial u_r}. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

这里

$$\partial(q_r, p_r)/\partial(u_r, v_r) \neq 0.$$

4) 取 $(q_r - q'_r)/2 = u_r$, $(p_r - p'_r)/2 = v_r$ 作为独立变数，和上面同样，利用 $G(u, v)$，則得

$$\left.\begin{aligned} q_r &= u_r - \frac{\partial G}{\partial v_r}, \quad q'_r = -u_r - \frac{\partial G}{\partial v_r}, \\ p_r &= v_r + \frac{\partial G}{\partial u_r}, \quad p'_r = -v_r + \frac{\partial G}{\partial u_r}. \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

这时和 3) 一样具有同样的条件。

(4.3) 的表示方法有一个优点，那就是，当力学系的一条路綫对于时間是周期性的，因而 $q'_r = q_r$, $p'_r = p_r$ 时，F 在这里具有极值。亦即，如 F 为已知，則从条件 $\partial F/\partial u_r = \partial F/\partial v_r = 0$ 可找出周期解。

§5 运动方程之积分

当 Hamiltonian 很簡单的时候，要求运动方程 (2.10) 的解，照通常方法解出就可以了。至于变换理論，那是在沒有办法的时候才使用的。

利用变换理論求解，可照下述方式进行。首先对 Hamilton–Jacobi 偏微分方程(2.9)中之一

$$\frac{\partial W}{\partial t}+H\left(q,\ \frac{\partial W}{\partial q},\ t\right)=0, \tag{5.1}$$

求它的包含 n 个任意常数的完全解，設这解为 $W(q,\ \alpha,\ t)$. 按照

$$p_r dq_r-\beta_r d\alpha_r=dW-\frac{\partial W}{\partial t}dt=\frac{\partial W}{\partial q_r}dq_r+\frac{\partial W}{\partial \alpha_r}d\alpha_r,$$

把变数由 $q_r,\ p_r$ 轉換成 $\alpha_r,\ \beta_r$. 也就是說，根据

$$p_r=\frac{\partial W}{\partial q_r},\quad \beta_r=-\frac{\partial W}{\partial \alpha_r}$$

把 $q_r,\ p_r$ 用 $\alpha_r,\ \beta_r,\ t$ 表示出来。这样可用 $\alpha_r,\ \beta_r$ 把运动方程写出。我們已經知道运动方程利用微分形式 $\omega_d=p_r dq_r-H dt$ 可写成形式 $\delta\omega_d-d\omega_\delta=0$，如使用上述变換，則

$$\begin{aligned}\omega_d=p_r dq_r-H dt&=\beta_r d\alpha_r+dW-\frac{\partial W}{\partial t}dt-H dt\\&=\beta_r d\alpha_r-\left(H+\frac{\partial W}{\partial t}\right)dt+dW.\end{aligned}$$

由于 W 是(5.1)的一个完全解，所以 $H+\dfrac{\partial W}{\partial t}$ 应該等于0. 因此，由于 dW 是全微分的原故，得到一个新的非 Hamiltonian 的微分形式

$$\omega_d'=\beta_r d\alpha_r.$$

从此，利用 $\delta\omega_d'-d\omega_\delta'=0$，于是有

$$\dot{\alpha}_r=0,\quad \dot{\beta}_r=0.$$

这說明 $\alpha_r,\ \beta_r$ 是常数。因此，由于 $p_r=\partial W/\partial q_r,\ \beta_r=-\partial W/\partial\alpha_r$，把 $q_r,\ p_r$ 表示成 $\alpha_r,\ \beta_r,\ t$ 的函数，就得到运动方程(2.10)的一般解。α_r 与 β_r 可由初始条件决定。这种方法是 Jacobi 的方法。

利用上述方法得出的解 $q_r=q_r(q',\ p',\ t',\ t)$ 来計算

$$\int_{A'}^{A} L dt=S(A,\ A'),$$

就得到 Hamilton 的主函数。当然，p'_r 也非用 q'_r, q_r, t, t' 表示出不可。q', p' 是关于时刻 t' 的变数之值。

利用 Jacobi 方法解决普通的問題，虽說費些周折，但以后我們还非用它不可。

§6 等能量系

当 Lagrange 函数中不含有时間因素时，能量一定的积分是存在的。在 Lagrange 函数 L 是 $\dot{q}_r$ 的 2 次式的情况下，把 2 次，1 次，0 次的項分开写成

$$L=L_2+L_1+L_0.$$

因此，能量 H 可写成

$$H=\dot{q}_r\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}-L=L_2-L_0,$$

当它等于常数 h 时，可写成

$$L_2-L_0=h.$$

这就是能量积分。現在試对积分

$$J=\int_{A'}^{A}Ldt-\int_{A'}^{A}(\sqrt{L_2}-\sqrt{L_0+h})^2dt$$

进行考查。当粒子的能量为 h 时，也只有这时，右边第二項等于 0，积分和第一項是一致的。因此，就能量恒为 h 的粒子而論，对于途中路綫的任意变分，有

$$\delta J=\delta\int_{A'}^{A}Ldt=0.$$

由于 J 可写成

$$J=\int_{A'}^{A}\{2\sqrt{L_0+h}\sqrt{L_2}+L_1\}dt-h(t-t')$$

的原故，对于能量 h 的粒子有

$$\delta\int_{A'}^{A}\{2\sqrt{L_0+h}\sqrt{L_2}+L_1\}dt=0. \tag{6.1}$$

这是 Birkhoff 对于 Maupertuis 的最小作用原理所给与的形式。

如果使用运动量 p_r 以及 $Ldt=p_rdq_r-Hdt=p_rdq_r-hdt$，则最小作用原理可以写成

$$\delta\int_{A'}^{A}p_rdq_r=0. \tag{6.2}$$

如果

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}_r\dot{q}_r+B_r(q)\dot{q}_r-B(q),$$

则运动量是 $p_r=\dot{q}_r+B_r(q)$，能量是

$$\frac{1}{2}\dot{q}_r\dot{q}_r+B(q)=h.$$

于是，

$$\begin{aligned}p_rdq_r&=\dot{q}_rdq_r+B_r(q)dq_r\\&=\sqrt{2(h-B(q))}\sqrt{dq_rdq_r}+B_r(q)dq_r\equiv\tilde{\omega}_d,\end{aligned} \tag{6.3}$$

把这个关于 dq_r 是一次齐次式的微分形式記成 $\tilde{\omega}_d$，则最小作用原理可写成

$$\delta\int_{A'}^{A}\tilde{\omega}_d=0. \tag{6.4}$$

在 Birkhoff 給出的形式(6.1)里以 $\dot{q}_rdt=dq_r$，则立刻可得到上式。

$\int_{A'}^{A}\tilde{\omega}_d$ 是只与两端 A', A 有关的函数，記成 $V(A, A')$，那末

$$dV=\tilde{\omega}_d(A)-\tilde{\omega}_d(A')=p_rdq_r-p'_rdq'_r. \tag{6.5}$$

因此，V 給出了如下的关系

$$\frac{\partial V}{\partial q_r}=p_r,\quad \frac{\partial V}{\partial q'_r}=-p'_r, \tag{6.6}$$

V 本身满足偏微分方程

$$H\left(q_r,\ \frac{\partial V}{\partial q_r}\right)=h,\quad H\left(q'_r,\ -\frac{\partial V}{\partial q'_r}\right)=h. \tag{6.7}$$

这个 $V(A, A')$ 称为 Hamilton 的特性函数。

除 V 外，定义这样一个函数

$$U=p_rq_r-V,$$

由于

$$dU=p_rdq_r+q_rdp_r-p_rdq_r+p'_rdq'_r=q_rdp_r+p'_rdq'_r, \quad (6.8)$$

所以 U 是 p_r, q'_r 的函数。更定义一个函数 T:

$$T=-p'_rq'_r+U=p_rq_r-p'_rq'_r-V.$$

由于

$$dT=q_rdp_r-q'_rdp'_r, \quad (6.9)$$

所以可把 T 看成 p_r, p'_r 的函数。

对于光学系而言,在(6.3)内把 $\sqrt{2(h-B(q))}=n$ 考虑成折射率,此时 $B_r=0$, 所以 $p_r=ndq_r/ds$, $ds=\sqrt{dq_rdq_r}$. 这就是說,当把 q_1, q_2, q_3 考虑成直交坐标时,运动量 p_1, p_2, p_3 就是光綫的方向余弦与折射率的乘积。

在介质始終是一样的情况下, V, U, T 的意义如下。由坐标原点引垂綫到从 A' 出发通过光学装置到达 A 的光綫,垂足記成 N', N. 这时,

V: $A'N'\cdots NA$ 的光学距离,

$-U$: $A'N'\cdots N$ 的光学距离,

$-T$: $N'\cdots N$ 的光学距离,

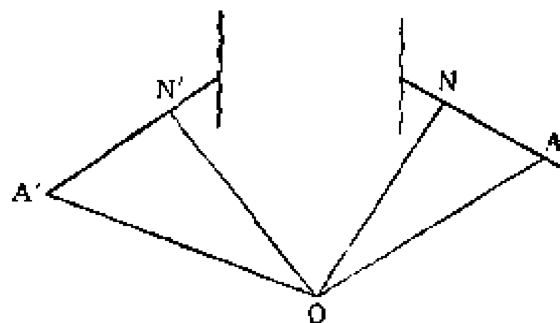


图 6.1

于是 V 应满足的方程是

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial q_3}\right)^2=n^2(q_1, q_2, q_3),\\ \left(\frac{\partial V}{\partial q'_1}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial q'_2}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial q'_3}\right)^2=n^2(q'_1, q'_2, q'_3).\end{aligned}\right\} \quad (6.10)$$

§7 变数的分离

当 Hamilton-Jacobi 偏微分方程能实行变数分离时,则运动方程可以积分。

当 Lagrange 函数不含时間 t，也不含有 L_1 的項时，Hamiltonian 也不含时間，不含有关于运动量的1次項。今設 Lagrange 函数 L 与 Hamiltonian H 为

$$\left.\begin{aligned} L&=\frac{1}{2}\sum h_r\dot{q}_r^2-B(q),\\ H&=\frac{1}{2}\sum\frac{1}{h_r}p_r^2+B(q),\end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

試求 Hamilton-Jacobi 偏微分方程能用变数分离法求解的条件。也就是說，求具有形式

$$W=-ht+\sum_r V_r(q_r,\ c_1,\ \cdots,\ c_{n-1},\ h) \tag{7.2}$$

之解的条件。这里的 V_r 是只关于 q_r 的函数，包含 n 个任意常数 $c_1,\ \cdots,\ c_{n-1},\ h$。

如果(7.2)是解，則有恒等式

$$\frac{1}{2}\sum\frac{1}{h_r}\left(\frac{dV_r}{dq_r}\right)^2+B(q)=h. \tag{7.3}$$

利用簡写

$$\left(\frac{dV_r}{dq_r}\right)^2=v_r(q_r),$$

以 $q_1=\cdots=q_n=0$，則有关系

$$\frac{1}{2}\sum\frac{1}{h_r(0)}v_r(0)+B(0)=h. \tag{7.4}$$

由于 $v_r(0)$ 中含有任意常数，所以这些 $v_r(0)$ 也取任意数值。因此，重新写做 $h=\alpha_1,\ v_2(0)=\alpha_2,\ \cdots,\ v_n(0)=\alpha_n$，它們是任意常数. $v_1(0)$ 由 (7.4) 可用 $\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n$ 表示出来。于是(7.3)内只有一个变数 q_1，其余的全是 0，可写成

$$\frac{1}{2}\frac{1}{h_1(q_1,\ 0)}v_1(q_1)+\frac{1}{2h_2(q_1,\ 0)}v_2(0)+\cdots$$
$$+\frac{1}{2h_n(q_1,\ 0)}v_n(0)+B(q_1,\ 0)=h.$$

利用常数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 把上式重新写成

$$\frac{1}{2}v_1(q_1)=\sum_r \varphi_{1r}(q_1)\alpha_r-\psi_1(q_1).$$

同样地,可得到

$$\frac{1}{2}v_s(q_s)=\sum_r \varphi_{sr}(q_s)\alpha_r-\psi_s(q_s) \quad (s=2, 3, \cdots, n).$$

$\varphi_{sr}(q_s)$ 以及 $\psi_s(q_s)$ 只是 q_s 的函数。把它們代入(7.3),那末,对于任意常数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 非恒等地成立不可。也就是說

$$\sum_s \frac{1}{h_s}\{\sum_r \varphi_{sr}(q_s)\alpha_r-\psi_s(q_s)\}+B(q)=h=\alpha_1.$$

比較两边的 α_r 之系数,就得到关于 $1/h_s$ 的1次方程

$$\sum_s \varphi_{s1}(q_s)\frac{1}{h_s}=1,$$

$$\sum_s \varphi_{sr}(q_s)\frac{1}{h_s}=0 \quad (r=2, 3, \cdots, n),$$

以及

$$B(q)=\sum_s \frac{1}{h_s}\psi_s(q_s).$$

假設以 n^2 个函数 $\varphi_{rs}(q_r)$ 作为元素的 n 阶矩陣 (φ_{rs}) 的逆矩陣記成 (φ^{rs}),則

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{h_s}=\varphi^{1s} \quad (s=1, 2, \cdots, n),\\&B(q)=\sum_s \varphi^{1s}\psi_s.\end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

α_1 是能量常数,其他的 α_r 都是积分常数,滿足

$$\sum_r \varphi^{sr}\left\{\left(\frac{dV_r}{dq_r}\right)^2+2\psi_r(q_r)\right\}=2\alpha_s \quad (s=2, 3, \cdots, n)$$

的积分是存在的。因此,完全解 W 可写成

$$W=-\alpha_1 t+\sum_r \int \sqrt{2}\ \{\varphi_{r1}(q_r)\alpha_1+\cdots+\varphi_{rn}(q_r)\alpha_n-\psi_r(q_r)\}^{\frac{1}{2}}dq_r.$$

如果使用运动量 $p_r=\partial W/\partial q_r$ 来写,則

$$\left.\begin{aligned} W &= -\alpha_1 t + \sum_r \int p_r dq_r, \\ p_r &= \sqrt{2}\,\{\varphi_{r1}(q_r)\alpha_1 + \cdots + \varphi_{rn}(q_r)\alpha_n - \psi_r(q_r)\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \quad (7.6)$$

如果粒子是在 3 維 Euclid 空間內运动,空間的綫素平方

$$ds^2 = \sum h_r(q) dq_r^2,$$

利用变数分离之条件(7.5)可划分为 11 种型式。

如果 Lagrange 函数含有 $\dot{q}_r$ 的一次項，則变数分离的問題要复杂一些,但 $h_r(q)$ 还是相同的。

§8 周期路綫

当变数可分离时,完全解由(7.6)給出,根据 Jacobi 的积分法,路綫由

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_r} = -\beta_r \quad (r = 2, 3, \cdots, n) \qquad (8.1)$$

决定,和时間的关系是

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = -\beta_1. \qquad (8.2)$$

現考虑各变数 $q_r (r=1, 2, \cdots, n)$ 分别限制在某一区間內往复变动的情况。如果各变数分别在它限定的区間內往复变动，粒子的运动回复原态构成周期运动，行一个来回的积分記成 $\oint$，那末，利用作用量

$$J = \sum_r \oint p_r dq_r, \qquad (8.3)$$

有

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_r} = 0 \quad (r = 2, 3, \cdots, n). \qquad (8.4)$$

反之,如这式成立,則粒子的运动是周期的。原因是，經过一周期后，$\beta_r (r=2, 3, \cdots, n)$ 不能不回到原来的值。因此，从 (8.2) 看出,周期 T 为

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_1}=\frac{\partial J}{\partial h}=T. \tag{8.5}$$

如果坐标 $q_1, \cdots, q_k$ 在 Hamiltonian 中不出現时，和这些坐标成共轭的运动量 $p_1, \cdots, p_k$ 对于时間的变化是不变的，由

$$p_r=\alpha_{r+1} \quad (r=1, 2, \cdots, k)$$

給出 k 个积分。这时，W 可写为

$$W=-\alpha_1 t+\alpha_2 q_1+\cdots+\alpha_{k+1} q_k+\sum_i \int p_i dq_i. \tag{8.6}$$

这里的 $\sum_i$ 是关于殘留下来的坐标的总和。如对于殘留下来的坐标 $q_{k+1}, \cdots, q_n$ 运动是周期的，和前面一样，利用

$$J=\sum_i \oint p_i dq_i,$$

得出如

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial \alpha_1}=T, \quad \frac{\partial J}{\partial \alpha_{r+1}}&=-Q_r \quad (r=1, 2, \cdots, k), \\ \frac{\partial J}{\partial \alpha_{i+1}}&=0 \quad (i=k+1, \cdots, n-1)\end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

这样的关系式。Q_r 是坐标 q_r 在一个周期内的增量。

如果用 h 代替 α_1，以 p_r 代替 $\alpha_{r+1} (r=1, 2, \cdots, k)$，上述关系式如用微分形式写出来，則为

$$dJ=Tdh-Q_1 dp_1-\cdots-Q_k dp_k. \tag{8.8}$$

对于周期运动讲来，J 这个作用量是基本的。因为有了它就可以进行全部的計算。

如果一个周期内 W 之增加量記成$[W]$，則由 (8.6) 可得

$$[W]=-Th+Q_1 p_1+\cdots+Q_k p_k+J. \tag{8.9}$$

如用微分形式表示，那就是

$$d[W]=p_1 dQ_1+\cdots+p_k dQ_k-hdT. \tag{8.10}$$

这和微分形式 ω_d 很相象，但自由度减少了，Q_r, T 的意义改变了。

在能使用变数分离的力学系里，固然可象(8.3)那样地把作用量立刻写出来，但即使当 Hamiltonian 里不出现坐标 $q_1, \cdots, q_k$，而对其他坐标又不能分离变数的情况下，W 还是可以写成

$$W=-\alpha_1 t+\alpha_2 q_1+\cdots+\alpha_{k+1} q_k+V.$$

V 包含任意常数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，是 $q_{k+1}, \cdots, q_n$ 的函数，可从微分方程来确定。对 $q_{k+1}, \cdots, q_n$ 讲来，如运动是周期的，經过一个周期 W，V 之增加量为$[W]$，J，q_r 的进展为 Q_r 时，仍然一样，同样的关系(8.8)，(8.9)，(8.10)还是成立的。

如果变数 $q_i(i=k+1, \cdots, n)$ 在其区間內經过 ν_i 次的来回才使得粒子运动关于这些坐标 $q_{k+1}, \cdots, q_n$ 之全体形成周期的运动，那末 J 就不能不采取如下形式

$$J=\sum_i \nu_i \oint p_i dq_i.$$

§9 自由度为1的力学系

以下对于自由度为1的力学系計算 J。設力学系的 Hamiltonian 給定为

$$H=\frac{1}{2} p_x^2+f(x),$$

这力学系具有能量积分

$$\frac{1}{2} p_x^2+f(x)=h.$$

当 x 限制在某一区間內，运动是周期的情况下，作用量 J 为

$$J=\oint \sqrt{2h-2f(x)}\, dx. \tag{9.1}$$

x 变化的区間是滿足 $h-f(x) \geqslant 0$ 的区間。設 $f(x)$ 有一个极小值，把这个地方作为坐标原点。于是，$f(x)$ 的展开是从 x^2 項开始的。根据

$$2f(x)=c_1x^2+c_2x^3+c_3x^4+\cdots=\tau^2,\quad c_1=f''(0)>0$$

把变数 x 变为 τ。但规定 τ 比 x 小时，取和 x 同号的分支。那末，用 τ 表示 x 则得

$$x=\varphi(\tau)=\frac{1}{\sqrt{c_1}}\tau-\frac{c_2}{2c_1^2}\tau^2+\frac{1}{\sqrt{c_1}}\left(\frac{5}{8}\frac{c_2^2}{c_1^3}-\frac{c_3}{2c_1^2}\right)\tau^3$$
$$-\left(\frac{c_2^3}{c_1^5}-\frac{3}{2}\frac{c_2c_3}{c_1^4}+\frac{c_4}{2c_1^3}\right)\tau^4+\cdots,\tag{9.2}$$

τ 的变化区間是 $(-\sqrt{2h},\ \sqrt{2h})$。这时，对

$$J=\oint\sqrt{2h-\tau^2}\,\varphi'(\tau)\,d\tau$$

进行一次分部积分，利用 $\sqrt{2h-\tau^2}$ 在两端是 0 的这一事实，就有

$$J=\oint\frac{\tau\varphi(\tau)}{\sqrt{2h-\tau^2}}d\tau.$$

如把 $\varphi(\tau)$ 写成

$$\varphi(\tau)=\beta\tau+\beta_1\tau^2+\beta_2\tau^3+\beta_3\tau^4+\cdots,\tag{9.3}$$

则

$$J=2\pi\left\{\frac{1}{2}\beta 2h+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\beta_2(2h)^2+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\beta_4(2h)^3+\cdots\right\}.\tag{9.4}$$

因此，从 (8.8) 得出的周期 $T=\partial J/\partial h$ 現在应是

$$T=2\pi\left\{\beta+\frac{1\cdot3}{1}\beta_2h+\frac{1\cdot3\cdot5}{1\cdot2}\beta_4h^2+\cdots\right\}.\tag{9.5}$$

由于能量的关系，一般說来，周期要改变，如果改变方式被指定，則和它适应的势 (potential) $f(x)$ 就能够确定出来。

例如說，由于能量的关系，对于周期不改变的力学系，要把它解出，則命

$$\beta_2=\beta_4=\cdots=0$$

就可以了。这时

$$x=\varphi(\tau)=\beta\tau+\beta_1\tau^2+\beta_3\tau^4+\cdots,$$

把 $2f(x)=\tau^2$ 用 x 表示出来，就可得出势。$\beta(>0)$，β_1，β_3，$\cdots$可

以是任意的数，但作为反函数的 τ 必須是 x 唯一确定的函数。

例如說，就

$$x=\beta\tau+\beta_1\tau^2$$

而論，势由

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{2\beta_1} - \frac{\beta}{4\beta_1^2}(\sqrt{\beta^2+4\beta_1 x}-\beta) \\ &= \frac{x^2}{2\beta^2} - \frac{\beta_1}{\beta^4}x^3 + \frac{\beta_1^2}{2\beta^6}x^4 - \cdots \end{aligned}$$

而求得。但这时条件 $|4\beta_1 x/\beta^2|<1$ 是必要的，因此，振幅有一定的限度。

如果假定的条件是 $f(x)$ 为偶函数，則因 $\varphi(\tau)$ 一定是 τ 的奇函数的原故，$\beta_1=\beta_3=\cdots=0$，这时除了諧振子 (harmonic oscillator) 之外就沒有别的了。

在早期的量子論里，假定作用量 J 是某一单位的整数倍，从 J 和能量的关系确定了能級 (energy level)。如使用上述的計算，給出了能級，也就是說給出了 h 和 J 的关系，反过来可以确定力学系。例如，給定了氫原子的能級的力学系，存在着无数多种。

第2章　有关力学系的映射

§10　Maxwell 的魚眼現象

从物空間任意一点出发的光綫，只要有一些光綫通过光学装置，全都集聚在象空間內一点，物与象成为一对一的对应时，我們称之为結象完全。平面鏡的反射，虽說象是虛象，但結象是完全的。完全結象系的古典例子是所謂 Maxwell 的魚眼現象。这是介质的折射率 n 只与到中心之距离 r 有关，且按照式子

$$n=n_0\frac{a^2}{a^2+r^2}$$

而变化的光学系。

这时的結象可由光綫的方程确定出来。Maxwell 所用的是几何学的方法。但更易于了解的是利用球极平面射影(stereographic projection)的 Caratheodory 的方法。

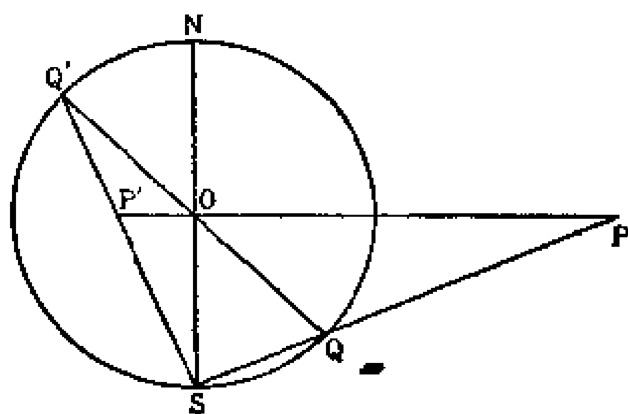


图　10.1

为了作图的方便，我們討論2維的情形。以3維的直交坐标系 x_1, x_2, x_3 的原点作为中心，画半徑为1的球面，以 $(0, 0, 1)$ 作为 N，$(0, 0, -1)$ 作为 S。平面上的点 $P(x_1, x_2)$ 和 S 用直綫連接起来，球面和这条連綫之交点 Q 的坐标設为 (ξ_1, ξ_2, ξ_3)，則

$$\xi_1=\frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2+1},\quad \xi_2=\frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2+1},\quad \xi_3=\frac{1-x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2+1}.$$

平面上的点和球面上的点就这样地构成一对一的对应。球面上的

綫素由

$$d\xi_1^2+d\xi_2^2+d\xi_3^2=\frac{2(dx_1^2+dx_2^2)}{(x_1^2+x_2^2+1)^2}$$

所給定。折射率为 $n=1/(1+x_1^2+x_2^2)$ 的介质中的光綫方程利用 Fermat 原理可从 $\delta\int n\sqrt{dx_1^2+dx_2^2}=0$ 得出，但这式和球面上的 $\delta\int\sqrt{d\xi_1^2+d\xi_2^2+d\xi_3^2}=0$ 是相当的。因此，平面上的光綫对应于球面上的測地綫，即大圓。

过 P 的对应点 Q 的球面上大圓，都交在 Q 关于原点的对称点 Q' 处。而球面上的大圓对应于平面上的圓。由于这个原因，在平面上所有过 P 的光綫都与圓周❶相交，再汇集于和 Q' 成对应的点 P'。設 P' 的坐标是 x_1', x_2', 則

$$x_1'=\frac{-x_1}{x_1^2+x_2^2},\quad x_2'=\frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}.$$

这种由 (x_1, x_2) 到 (x_1', x_2') 的对应称为反轉。

具有这样值得注意的性质的介质，其存在的可能性据說是 23 岁的 Maxwell 观察魚眼的水晶体面想到的。Caratheodory 曾提到，前世紀之末有名叫 Mathiessen 其人的，經过調查他种魚的眼睛証实了 Maxwell 的公式是对的。

在 3 維情况下，物点 (x_1, x_2, x_3) 和象点 (x_1', x_2', x_3') 的对应关系是

$$x_1'=\frac{-x_1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2},\quad x_2'=\frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2},\quad x_3'=\frac{-x_3}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}. \tag{10.1}$$

从此反过来解出 x_1, x_2, x_3, 得到同样形式的关系。因此，就知道

$$\frac{dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2+1)^2}=\frac{dx_1'^2+dx_2'^2+dx_3'^2}{(x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2+1)^2} \tag{10.2}$$

这样的不变式。設物与象空間的綫素分别为 ds 与 ds'，利用折射率 $n=1/(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2)$，則上式可写成

❶ 即球面与平面相交的单位圓。——校者注

$$n(x)\,ds=n(x')\,ds', \tag{10.3}$$

亦卽，物与象具有同样的光学大小。因此，在完全結象的情况下，象的大小随折射率的反比而扩大。这意味着象与物是相似的。

§11 基本法則

当物点(x_1', x_2', x_3')与象点(x_1, x_2, x_3)成一对一的对应，結象是完全时，如前节最后提到的，一般存在着

$$n(x)\,ds=n(x')\,ds' \tag{11.1}$$

这样的关系。这是几何光学的基本法則。

最初注意到这項法則，就各向同性的均匀介质来驗証的是 Maxwell。对于小物体，卽在一阶近似情况下也成立这是 Bruns 注意到的；但为 F. Klein 所首先清楚地闡述出来而予以証明。Klein 的証明是利用虚球面的。其后 Liebmann 利用圓的外切四边形之性质来予以証明，但就一般的介质进行証明的是 Caratheodory。他給出了三套証明方法，其一載于 Herzberger 的 Strahlenoptik 一书里，另一載于 Born 的 Optik 一书，还有一法載于 Caratheodory 本人所著的 Geometrische Optik 一书里。

載于 Caratheodory 书里的方法是最簡明的。就各向同性的介质而論，其証明方法如下所述。从有关等能量系的式子(6.5)，我們知道，如利用 Hamilton 特性函数 V，則有

$$\begin{aligned} dV&=y_r dx_r-y_r' dx_r'=\tilde{\omega}_d-\tilde{\omega}_d' \\ &=n(x)\sqrt{dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2}-n(x')\sqrt{dx_1'^2+dx_2'^2+dx_3'^2}, \end{aligned} \tag{11.2}$$

这样的关系存在于物与象之間。dV 是全微分。由于(x_1, x_2, x_3)和(x_1', x_2', x_3')的对应是一对一的，所以可写成

$$x_i'=x_i'(x_1, x_2, x_3). \tag{11.3}$$

如以 x_1, x_2, x_3 作为独立变数，則 dx_i' 关于 dx_1, dx_2, dx_3 是 1 次式，dV 也是一样的，所以(11.2)是 dx_i 的 1 次齐次式。現固定 x_i

而把 dx_i 看成变数，以 ξ_i 来表示，则(11.2)两边用 n 除了以后就可写成

$$
\left.\begin{aligned}
&\sqrt{A}=\sqrt{B}+C,\\
&A=\left(\frac{n(x')}{n(x)}\right)^2\sum_i\left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_k}dx_k\right)^2\equiv a_{ij}\xi_i\xi_j,\\
&B=\sum(dx_k)^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2,\\
&C=-\frac{1}{n(x)}\frac{\partial V}{\partial x_i}dx_i\equiv c_i\xi_i.
\end{aligned}\right\}\qquad(11.4)
$$

两边取平方，

$$A=B+C^2+2C\sqrt{B},$$

再取平方

$$(A-B-C^2)^2=4C^2B.$$

这个式子对 ξ_i 来讲，是4次式。ξ_i 所受的限制只要規定它使得光綫通过結象系就行了。还要規定上式在小的有限区域內必須成立。由于式子的两边同是 ξ_i 的多項式，因此，就 ξ_i 而言非是恒等式不可。 如果 C 不恒等于0，則 $A-B-C^2$ 必能被 C 整除，其商的平方应当是 $4B$. 由于 B 不可能是有理式的平方，所以上述事件是不可能发生的。 因此，C 不能不恒等于0. 从此就导出基本法則。 如果利用 A 与 B 是 ξ_i 的偶函数这一事实，固然可立刻导出 $C=0$，但这样就要求，从任意的物点出发必有一条光綫及其反对方向的光綫发射出去，在它們的反对方向集結成象。 为了避免这个条件，所以 Caratheodory 才采用了上述的証明方法。

其次，試利用 Hamilton 的特性函数 $U(x_i, y'_i)$ 来証明。从§6, (6.8)有

$$y_i=\frac{\partial U}{\partial x_i},\quad x'_i=\frac{\partial U}{\partial y'_i}.$$

但 x'_i 只是 x_1, x_2, x_3 的函数，因此可把 U 写成

$$U=y'_1x'_1(x)+y'_2x'_2(x)+y'_3x'_3(x)+w(x).$$

从而，

$$y_i = y'_k \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} + \frac{\partial w}{\partial x_i}. \tag{11.5}$$

但从§6的(6.7)或(6.8)看出 x_i, y_i; x'_i, y'_i 不能不分别满足

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = n^2(x), \tag{11.6}$$

$$y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2 = n^2(x'). \tag{11.7}$$

把(11.5)代入(11.6)内，有

$$\sum_i \left(y'_k \frac{dx'_k}{dx_i} + \frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2 = n^2(x). \tag{11.8}$$

这式和(11.7)式至少在 x_i, y'_i 的某一范圍内非同时成立不可。两者中无論那一个关于 y'_i 都是2次式，由于(11.7)在 y'_i 空間表示一个球面，所以(11.8)也不能不表示球面。因此，y'_i 的各項应分别具有同一的比值。

首先从 y'_i 的一次項得出

$$\frac{\partial x'_k}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial x'_k}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\partial x'_k}{\partial x_3}\frac{\partial w}{\partial x_3} = 0 \quad (k = 1, 2, 3).$$

由于 $x_i \to x'_i$ 的对应是一对一的，所以 $\partial(x'_1, x'_2, x'_3)/\partial(x_1, x_2, x_3) \neq 0$，于是

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial w}{\partial x_2} = \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0.$$

其次比較 $y'_i y'_j$ 的系数

$$\frac{\partial x'_k}{\partial x_1}\frac{\partial x'_k}{\partial x_1} = \frac{\partial x'_k}{\partial x_2}\frac{\partial x'_k}{\partial x_2} = \frac{\partial x'_k}{\partial x_3}\frac{\partial x'_k}{\partial x_3} = \frac{n^2(x)}{n^2(x')},$$

$$\frac{\partial x'_k}{\partial x_i}\frac{\partial x'_k}{\partial x_j} = 0 \quad (i \neq j).$$

从此就导出了基本法則。这个証明方法，可能在 Caratheodory 之前 Hamilton 就有这样的动机，也未可知。

§12 完全結象系

几何光学的主要目的是要給出沒有象差的結象系。当然，这时的对应当作面与面的对应也許是适当的，但我們为了更好地体会条件，首先利用从空間到空間的对应来研究完全結象系。

在古典力学里，对于已給定的力学系研究运动性质是重要的問題。例如天体力学中的二体問題，三体問題等这类象陀螺一样的問題(旋轉体問題)。Poincaré 研究了这种力学系的运动性质，发現了周期运动是极其重要的性质，他著的 Mécanique Céleste 三卷中对周期解有詳細的討論。在这里面，他曾这样說过："我們之所以重視周期解，可以这样說，那是因为它是唯一的突破口，使我們攻进直到目前认为不可接近的区域" (D'ailleurs, ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est qu'illes sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable)。

Birkhoff 至少对于自由度 2 的力学系，也成功地把周期解作为主要工具，在其研究中，考虑到好几种方法。

周期解就如上述那样被认为具有重要性。

如果从游星那样的宏大宇宙进到电子或离子那样的微小世界，我們可以这样讲，力学系并不是預先給定的，而是为了适合我們的目的而选择出来的东西。

因此，在这里我們把問題引回来。那就是說，只确定那种具有周期解的力学系。但是这样一来，应用范圍未免太狭小一点。因为这种力学系固然是完全結象系，但完全結象系里的粒子运动路綫却不一定是周期性的。

为此，就有比确定完全結象系这个問題更一般的問題摆在我們面前。如采用更一般的說法，我們大概可以这样地提出：

对于某一給定了的典型变换，要确定能实現它的力学系。

§13 完全結象系的种类

和光学系不同，力学系里討論的是与时間、能量有关系的，完全結象系可分成若干类型。

1) 在时刻 t' 自点 $A'(x'_1, x'_2, x'_3)$ 发出的粒子，在另一时刻 t 全都集聚在点 $A(x_1, x_2, x_3)$，对应 $(x'_1, x'_2, x'_3, t')\rightarrow(x_1, x_2, x_3, t)$ 是一对一的。这时沒有例子說明可以再行分类。

2) Hamiltonian 里不含时間因素的情况：

a) 只有某一能量的粒子能完全結象，即从点 A' 发出的某一能量的粒子全都集聚在点 A，$A'\rightarrow A$ 是一对一的对应。

b) 任意（至少在某一有限范圍內）能量的粒子能完全結象。

这时又分成三种情况：

(i) 象点的位置以及从光源或粒子源到达象的到达时間，这两者中无論那一件对于能量是不变的。

(ii) 象点的位置是不变的，但到达时間对于能量是变的。

(iii) 象点的位置因能量而移动。

如果这样的結象系存在，那末，(i) 由于象点位置及到达时間与离子速度或能量无关，所以測定质量对电荷之比的裝置，能够起有效的作用。(ii) 对于利用到达时間測定能量的裝置起着作用。(iii) 可应用于能量摄譜仪(energy spectrograph)。

如果只是为了上述的这些应用，那末，不利用完全結象系而利用近軸光綫的結象系也許就够了。但是，这样就引不起我們的兴趣，而且只为了应用目的而开展典型变换的理論，眞可以說是一种浪費。我們的目标是确定完全結象系。虽說有了完全結象这样严格的条件，但我們距目标还很远。

§14 有关完全結象系的映射(1)

与完全結象系有关的映射只有极其特殊的类型。这是由于不能以任意形式的函数作为力学系的 Lagrange 函数的原故。最一般的形式在3維时，用直交坐标 x_1, x_2, x_3，可写为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)+B_1(x)\dot{x}_1+B_2(x)\dot{x}_2$$

$$+B_3(x)\dot{x}_3-B(x). \qquad (14.1)$$

这是在向量位(vector potential)为(B_1, B_2, B_3)，数量位(scalar potential)为B的电磁場中，单位质量与单位电荷的粒子的 Lagrange 函数。由此如§3那样导出运动方程，則有

$$\frac{d^2x_r}{dt^2}=f_{rs}\frac{dx_s}{dt}+E_r \quad (r=1, 2, 3),$$

这里

$$f_{rs}=\frac{\partial B_s}{\partial x_r}-\frac{\partial B_r}{\partial x_s}, \quad E_r=-\frac{\partial B}{\partial x_r}-\frac{\partial B_r}{\partial t}$$

分别是磁場，电場的强度。但是运动方程这时并不是必要的。

在时刻t'从点(x_1', x_2', x_3')发出的粒子于时刻t集于点(x_1, x_2, x_3)，設$(x_1', x_2', x_3', t')\to(x_1, x_2, x_3, t)$是一对一的对应。从(2.6)知道这个对应有

$$\omega_d(x, t)-\omega_d(x', t')=dS$$

这样的关系。dS是一个全微分。因此，由$\omega_d=Ldt$而有

$$\{\dot{x}_r\dot{x}_r+2B_r(x)\dot{x}_r-2B(x)\}dt$$

$$=\{\dot{x}_r'\dot{x}_r'+2B_r(x')\dot{x}_r'-2B(x')\}dt'+2dS. \qquad (14.2)$$

由于对应$(x_1', x_2', x_3', t')\to(x_1, x_2, x_3, t)$是一对一的，所以可把它表示成

$$\left.\begin{aligned} x_i'&=x_i'(x_1, x_2, x_3, t),\\ t'&=t'(x_1, x_2, x_3, t).\end{aligned}\right\} \qquad (14.3)$$

这式必須和式 (14.2) 同时成立。现在把 dx_i, dt 考虑成独立变数而記成 ξ_i, ξ_0, 則由 (14.3) 得到綫性变換

$$\left.\begin{aligned}\xi'_i&=a_{ij}\xi_j+a_{i0}\xi_0,\\ \xi'_0&=a_{0j}\xi_j+a_{00}\xi_0.\end{aligned}\right\} \tag{14.4}$$

另一方面，从 (14.2) 得

$$\frac{\xi_r\xi_r+2B_r\xi_r\xi_0-2B\xi_0^2}{\xi_0} = \frac{\xi'_r\xi'_r+2B'_r\xi'_r\xi'_0-2B'\xi_0'^2}{\xi'_0}+2s_i\xi_i+2s_0\xi_0, \tag{14.5}$$

这里

$$B'_r=B_r(x',t'),\quad s_i=\partial S/\partial x_i,\quad s_0=\partial S/\partial t.$$

S 是 x_i, t, x'_i, t' 的函数，而 x'_i, t' 又是 x_i, t 的函数，因而 S 只是 x_i, t 的函数，上面是它关于 x_i, t 的微分。这个式子可改写成

$$\xi'_0\{\xi_r\xi_r+2(B_r-s_r)\xi_r\xi_0-2(B+s_0)\xi_0^2\} = \xi_0\{\xi'_r\xi'_r+2B'_r\xi'_r\xi'_0-2B'\xi_0'^2\}. \tag{14.6}$$

(14.6) 和 (14.4) 不能不同时成立。(14.6) 的两边关于 ξ 都是三次齐次式。因此，当这式在 ξ 的有限区域内成立的时候，它必是恒等式。由于右边可用 ξ_0 除尽，所以左边也不能不被 ξ_0 除尽。但 $\xi_r\xi_r$ 不能用 ξ_0 除尽，所以 ξ'_0 一定可被 ξ_0 除尽。于是

$$\xi'_0=a_{00}\xi_0,\quad a_{0i}=0,$$

这意味着 $t'=t'(t)$，亦即，t' 是仅与 t 有关而与 x_i 无关的函数。

其次，以 ξ_0 除 (14.6)，在所得的式子中比較 ξ_r 的二次項，就有

$$a_{00}\xi_r\xi_r=\xi'_r\xi'_r.$$

因此，矩陣 (a_{ij}) 是直交矩陣的倍数。

粒子从粒子源出发到达象的时間和粒子源的位置沒有关系，因此，把 t, t' 規定后，則 $x_r\to x'_r$ 的对应成立着

$$a_{00}dx_rdx_r=dx'_rdx'_r,$$

另一方面，由于 $a_{00}=dt'/dt$, 故得到不变式

$$\frac{dx_r dx_r}{dt} = \frac{dx'_r dx'_r}{dt'}. \tag{14.7}$$

如果象是放大的，那末，一定是放大 dt/dt' 倍。但是这样的結象系还未发見。就算有这样的結象系，如本节所說的那样，它所引出的可能的映射只能是相似映射。这是因为 L_2 亦卽粒子的动能是和速度的平方成比例的。要用射影变换表示出具有近軸光綫的映射是不可能的。可是，如把 L_2 項的形式改变一下，这种变换就不是不可能的了。如果篇幅够的話，还可举出这种例子。

§15 有关完全結象系的映射 (2)

当 Hamiltonian 不包含时間因素时，能量积分是存在的。在只有某一定能量的粒子能完全結象的情况下，試考察映射的性质。

源 (x'_1, x'_2, x'_3) 与象 (x_1, x_2, x_3) 的对应是一对一的，x'_i 是 x_i 的函数时，$x'_i \to x_i$ 的映射只限于保角映射。

利用§6里等能量系的关系式 $\tilde{\omega}_d(A) - \tilde{\omega}_d(A') = dV$，卽(6.5)，有

$$\sqrt{2h-2B(x)}\sqrt{dx_r dx_r} + B_r(x)dx_r = \sqrt{2h-2B(x')}\sqrt{dx'_r dx'_r} + B_r(x')dx'_r + dV. \tag{15.1}$$

对此再使用§11提到的 Caratheodory 証法，上式两边根号内的式子应相等。于是，可得出下面两个关系式

$$(h-B(x))dx_r dx_r = (h-B(x'))dx'_r dx'_r, \tag{15.2}$$

$$B_r(x)dx_r = B_r(x')dx'_r + dV. \tag{15.3}$$

(15.3)給出了向量位的对应关系，dV 这一項只不过引出了所謂的 Gauge 变换，并不影响到磁場的强度。事实上，对(15.3)进行外微分时，由于全微分的外微分是0的原故，得到不变式

$$f_{rs}(x)(dx_r\delta x_s - dx_s\delta x_r) = f_{rs}(x')(dx'_r\delta x'_s - dx'_s\delta x'_r), \tag{15.4}$$

这給出了磁場强度 f_{rs} 的对应关系。

利用粒子速度 v，且由于 $v^2+2B=2h$ 的原故，(15.2) 可写成

$$vds=v'ds'. \tag{15.5}$$

这意味着象的放大率是 v'/v，可和上节的 (14.7) 比較起来看。

放大率一般是位置的函数，而关系 (15.2) 是成立的，所以

$$l\equiv\sqrt{h-B(x')}/\sqrt{h-B(x)} \tag{15.6}$$

不可能是任意的函数。

x_r 以及 x'_r 作为 3 維 Euclid 空間的坐标是一对一对应的，但其間有关系

$$dx'_r dx'_r=dx_r dx_r/l^2, \tag{15.7}$$

綫素之平方是 $dx_r dx_r/l^2$ 的空間，其 Riemann 曲率張量不能不等于 0. 从这一条件就得出有关 l 的两組方程

$$\frac{\partial^2 l}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 l}{\partial x_2\partial x_3}=\frac{\partial^2 l}{\partial x_3\partial x_1}=0, \tag{15.8}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial l}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial l}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial l}{\partial x_3}\right)^2&=l\left(\frac{\partial^2 l}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 l}{\partial x_2^2}\right)\\&=l\left(\frac{\partial^2 l}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 l}{\partial x_3^2}\right)=l\left(\frac{\partial^2 l}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 l}{\partial x_1^2}\right).\end{aligned} \tag{15.9}$$

从前一条件有

$$l=f_1(x_1)+f_2(x_2)+f_3(x_3),$$

从后一条件得出

$$\frac{f_1'^2+f_2'^2+f_3'^2}{l}=f_1''+f_2''=f_2''+f_3''=f_3''+f_1''.$$

符号“′”是关于各变数的微分。从这里就有 $f_1''=f_2''=f_3''=$ 常数(設 $=2/k$)．可設 $f_i'=2(x_i-a_i)/k$ $(i=1, 2, 3)$，于是

$$l=\sum(x_i-a_i)^2/k.$$

因此，$x\to x'$ 的一般变换可写成

$$x'_i=a'_i+\sum c_{ik}(x_k-a_k)/l, \quad \left.\begin{array}{l}(c_{ik})\text{ 是直交矩陣,}\\ a_i,\ a'_i\text{ 是任意常数.}\end{array}\right\} \tag{15.10}$$

Maxwell 的魚眼情况里出現的反轉变換是属于这一类的，那时 $a_i=a'_i=0$，$c_{ik}=\delta_{ik}$，$k=-1$。

§16 有关完全結象系的映射 (3)

在对于任意能量的粒子,映射都是可能的情况中,根据§13的分类,在(i)和(ii)两类里,对于源 x'_i 的象 x_i，其位置不因能量而改变，因此，$l^2(h-B(x'))=h-B(x)$ 对于任意的 h 必須成立。于是在(i)，(ii)的情况下 $l=1$，并成立下面的关系：

$$dx'_r dx'_r = dx_r dx_r, \tag{16.1}$$

$$B_r(x')dx'_r = B_r(x)dx_r - dw, \tag{16.2}$$

$$B(x') = B(x), \tag{16.3}$$

变換 $x \to x'$ 的一般形式是

$$x'_i = a'_i + \sum c_{ik}x_k, \quad (c_{ik})\text{是直交矩陣} \tag{16.4}$$

亦即合同变換 (Euclid 运动变換)。如果对这种映射有不动点存在,記这个点为 ξ_i，則

$$\xi_i = a'_i + \sum c_{ik}\xi_k.$$

从原式減去这式,得到

$$x'_i - \xi_i = \sum c_{ik}(x_k - \xi_k).$$

这就是說,原点移于 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 后,变換就是直交变換。如果不动点不存在，那末 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 所滿足的方程当然沒有解，由 ξ_i 的系数組成的行列式应当等于0。这就是 $|c_{ik}-\delta_{ik}|=0$。于是 (c_{ik}) 有1作为特征値，对应这特征値的向量在直交变換 $\|c_{ik}\|$ 下是不变的。因此,这时存在着不变方向,变換 $x \to x'$ 可用沿这方向的平行移动表出。在无論那一种情况下,象总是重合于源的。

在象因 h 而移动,即(iii)的情况下,上述結論不能立刻就断定出来。

在情况(i)里,把时間 t 取作独立变数，利用在典型变換 x', y'

$\to x, y$ 下 Hamiltonian 不变这桩事实，也同样可得出上面三个关系(16.1)～(16.3)。

但是这些条件只不过是完全結象系所应满足的必要条件，只凭这些条件就想把完全結象系确定出来，是相当困难的。

如果运动方程可以积分，则問題就非常簡单了。当 Hamiltonian 关于 x_r, y_r 是2次形式时，则 Hamilton 的典型方程是綫性微分方程，立刻可以积分。但是这样的力学系所能实現的映射只有情况(i)，这种例証将在§19, 20举出。其中最簡单的結象系大概就是各向同性的諧振子，其 Hamiltonian 具有形式

$$H=\frac{1}{2}y_ry_r+\frac{1}{2}x_rx_r.$$

設 $t=0$ 时的初始值为 x'_r, y'_r，那末，由于

$$x_r=x'_r\cos t+y'_r\sin t,$$
$$y_r=-x'_r\sin t+y'_r\cos t\quad(r=1, 2, 3),$$

所以当 $t=\pi$ 时，

$$x_r=-x'_r\quad(r=1, 2, 3),$$

这就是說，得出了关于原点的对称。而当 $t=2\pi$ 时，

$$x_r=x'_r\quad(r=1, 2, 3),$$

卽象和源重合在一起。

当然，对于各向异性的情形也行。当 Hamiltonian 为

$$H=\frac{1}{2}y_ry_r+\frac{1}{2}(\nu_1^2x_1^2+\nu_2^2x_2^2+\nu_3^2x_3^2)$$

$(\nu_1:\nu_2:\nu_3=l_1:l_2:l_3,\ \ l_1, l_2, l_3$ 是沒有公約数的奇整数)时，也得出关于原点的对称。

还有，如照§9的求法，把周期一定的力学系分别沿着 x_1, x_2, x_3 分解，更可得到无数的結象系，这些个結象系只实現出 $x_r=x'_r$ $(r=1, 2, 3)$ 这样的映射。

§17　有关完全結象系的映射(4)

在 Hamiltonian 关于直交的曲綫坐标系$(q_1, \cdots, q_n)$可写成

$$H=\frac{1}{2}\sum\frac{1}{h_r}(p_r-B_r(q))^2+B(q)$$

的力学系里，当 H 中不含有 k 个坐标 $q_1, \cdots, q_k$ 时，那末，使它們的共轭运动量 $p_1, \cdots, p_k$ 为常数的积分是存在的。在这情况下，能量 h 的粒子如果能完全結象的話，这时 $q_1, \cdots, q_k$ 的增量 $Q_1, \cdots, Q_k$ 和粒子源的位置不发生关系。設源的典型变数是 (q'_r, p'_r)，象的典型变数是(q_r, p_r)，則在这个对应里有关系

$$\left.\begin{aligned}&p_1=p'_1, \cdots, p_k=p'_k,\\&q_r=q_r(q'_1, \cdots, q'_n).\end{aligned}\right\}\tag{17.1}$$

把 p_r, q'_r 取作独立变数，典型变换用 $U(p, q')$ 来表示，首先把 U 写成

$$U=p_rq_r(q')+f(q').$$

为了要滿足 $p'_1=p_1, \cdots, p'_k=p_k$ 等关系，$q_1-q'_1, \cdots, q_k-q'_k$ 以及 $q_{k+1}, \cdots, q_n$ 不能含有 $q'_1, \cdots, q'_k$。因此，可以这样写

$$\left.\begin{aligned}&q_i=q'_i+Q_i(q'_{k+1}, \cdots, q'_n)\quad(i=1, 2, \cdots, k),\\&q_s=q_s(q'_{k+1}, \cdots, q'_n)\quad(s=k+1, \cdots, n),\\&f=f(q'_{k+1}, \cdots, q'_n).\end{aligned}\right\}\tag{17.2}$$

于是 U 就可写为如下的形式

$$\begin{aligned}U=&p_1q'_1+\cdots+p_kq'_k+p_1Q_1+\cdots+p_kQ_k\\&+p_{k+1}q_{k+1}+\cdots+p_nq_n+f.\end{aligned}\tag{17.3}$$

因此，得出

$$p'_{k+1}=\frac{\partial U}{\partial q'_{k+1}}=\sum_{i=1}^{k}p_i\frac{\partial Q_i}{\partial q'_{k+1}}+\sum_{s=k+1}^{n}p_s\frac{\partial q_s}{\partial q'_{k+1}}+\frac{\partial f}{\partial q'_{k+1}}\tag{17.4}$$

等等。

但是，从 $H(q, p)-h=0$, $H(q', p')-h=0$ 同时成立的条件，即

$$\sum \frac{1}{h_r(q)}(p_r-B_r(q))^2+2B(q)-2h=0,$$

$$\sum \frac{1}{h_r(q')}(p'_r-B_r(q'))^2+2B(q')-2h=0$$

同时成立的条件，两个式子內有关 p_r 的同次項非成比例不可。因此 $H(q, p)$ 內不能存在 p_1p_{k+1}, …, p_1p_n, …, p_kp_n 等等項，对于 $H(q', p')$ 內的 p' 用 (17.4) 代进去所得的式子內也不能存在上述的項。于是 $H(q', p')$ 內有关 p_1p_{k+1}, …, p_1p_n 的系数应是 0，亦即

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{s=k+1}^{n} \frac{1}{h_s(q')} \frac{\partial Q_1}{\partial q'_s} \frac{\partial q_{k+1}}{\partial q'_s}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{s=k+1}^{n} \frac{1}{h_s(q')} \frac{\partial Q_1}{\partial q'_s} \frac{\partial q_n}{\partial q'_s}=0. \end{array}\right\} \tag{17.5}$$

这是关于 $\partial Q_1/\partial q'_{k+1}$, …, $\partial Q_1/\partial q'_n$ 的 $n-k$ 个綫性方程。由于是完全結象系的原故，从 (17.2) 有

$$\frac{\partial(q_1, \cdots, q_n)}{\partial(q'_1, \cdots, q'_n)}=\frac{\partial(q_{k+1}, \cdots, q_n)}{\partial(q'_{k+1}, \cdots, q'_n)} \neq 0.$$

因此，綫性方程組 (17.5) 的系数組成的行列式不等于 0。于是

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q'_{k+1}}=\cdots=\frac{\partial Q_1}{\partial q'_n}=0.$$

这就是說 Q_1 和 q'_{k+1}, …, q'_n 无关。其他的 Q_i 也有同样的情况。Q_i 就必須是 h 之函数。

如果完全結象系有

$$\left.\begin{array}{ll} q_i=q'_i+Q_i & (i=1, 2, \cdots, k), \\ q_s=q'_s & (s=k+1, \cdots, n) \end{array}\right\} \tag{17.6}$$

这样的关系，亦即，关于 q_i 只增加 Q_i，关于 q_s $(s>k)$ 是周期的，这时，由 (8.8)，作用量采取形式

$$J=f(h)-Q_1(h)p_1-\cdots-Q_k(h)p_k, \qquad (17.7)$$

也就是說，是 $p_1,\cdots,p_k$ 的1次式，其系数一般是 h 的函数。因此，周期 $T=\partial J/\partial h$ 就成为

$$T=f'(h)-Q_1'(h)p_1-\cdots-Q_k'(h)p_k, \qquad (17.8)$$

一般讲来，是 $p_1,\cdots,p_k$ 的1次式。T 和粒子的路綫无关时，$Q_1,\cdots,Q_k$ 和 h 沒有关系。利用关于 J 的条件把 §13 的分类写出来，就有

(i) $J=\beta h-\alpha_1p_1-\cdots-\alpha_kp_k$, ($\beta,\alpha_1,\cdots,\alpha_k$:常数), (17.9)

(ii) $J=f(h)-\alpha_1p_1-\cdots-\alpha_kp_k$, $f''(h)\neq 0$, (17.10)

(iii) $J=f(h)-Q_1(h)p_1-\cdots-Q_k(h)p_k$, 至少关于某一个 i $Q_i'(h)\neq 0$. (17.11)

这里的記号“′”是关于 h 的微分。

下一节要举出有关完全結象系的映射例子。可惜例子举得不太多，但現在是沒办法的事。

§18 有关可逆系的映射

当 Lagrange 函数中不存在 L_1 这样的項时，对于变换 $t\to-t$, $\dot{q}_r\to-\dot{q}_r$, L 是不变的。因此，运动方程对于这种变换也是不变的。这就是說，若有了一条路綫，则与之逆向进行的路綫也存在的。这样的力学系叫做可逆系。这时，如 A' 之象是 A, 则 A 之象是 A'. 于是，有关可逆系的映射二回連續进行的話，就是单位映射。坐标 $q_r(r<k)$ 的增量 $2Q_r$ 不能不等于0. 因而，Q_r 能取0以外的数值，只有当坐标 q_r 是源位置的多值函数时才会发生。

例如說，对于平面上的极坐标 r,θ 来讲，θ 不包含在 Hamiltonian 内时，由于映射使 θ 增加了 Θ, 这时 Θ 不能不滿足条件

$$2\Theta=2k\pi \quad (k=1,2,\cdots).$$

也就是說，$\Theta=k\pi$ $(k=1,2,\cdots)$.

于是，回旋角是另外的角度以及平移不能由可逆系而实现出来。

Hamiltonian 关于极坐标的形式中最簡单的情况是

$$H=\frac{1}{2}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)+B(r)=h,$$

現在求与它有关的映射。这时，$p_r=\dot{r}$, $p_\theta=r^2\dot{\theta}$, θ 不含于 H 中，因此，积分 $p_\theta=p$ 是存在的。作用量 J 現在是

$$J=\oint p_r dr=\oint\sqrt{2h-2B(r)-p^2/r^2}dr.$$

从前节末了所說的，要实現映射，J 必須是 p 的 1 次式。

命 $r=ae^x$, $2(h-B(r))r^2=f(x)$, 則

$$J=\oint\sqrt{f(x)-p^2}dx.$$

設 $f(x)$ 有一个极大値，这一点是 $x=0$. 也就是説，选擇一个 a 使 $r=a$. 那末，命

$$f(x)=l^2-\tau^2,\quad l^2=f(0),\quad l^2-p^2=\varepsilon^2,$$

和 §9 同样地进行，x 作为 τ 的函数以

$$x=\varphi(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\tau^n$$

表示出来。这样一来，和 §9 同样，有

$$J=\oint\frac{\varphi(\tau)\tau}{\sqrt{\varepsilon^2-\tau^2}}d\tau=2\pi\left\{\frac{1}{2}c_1\varepsilon^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}c_3\varepsilon^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}c_5\varepsilon^6+\cdots\right\}$$

$$=2\pi\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n-1}(-1)^n\binom{-1/2}{n}\varepsilon^{2n}. \tag{18.1}$$

这里的 $\binom{-1/2}{n}$ 是 $(1+x)^{-1/2}$ 的展开式内关于 x^n 的系数。

但由于 J 不能不是 $p=\sqrt{l^2-\varepsilon^2}$ 的 1 次式，所以一定有

$$\partial J/\partial p=-\Theta=-k\pi\quad(k=1,2,\cdots),$$

由于这个原因，把这 1 次式写成 $b-\pi kp$. 于是

$$J=b-\pi kp=b-\pi k\sqrt{l^2-\varepsilon^2}$$
$$=b-\pi kl+\pi kl\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\binom{-1/2}{n}\frac{\varepsilon^{2n}}{l^{2n}}.$$

这式和(18.1)比較，就得到

$$b-\pi kl=0,$$
$$c_{2n-1}=\frac{k}{2(2n-1)}\frac{1}{l^{2n-1}}\quad(n=1,\ 2,\ 3\cdots),$$

c_{2n}：任意。

于是，x，J，Θ 就是

$$x=\frac{k}{2}\left\{\frac{\tau}{l}+\frac{1}{3}\left(\frac{\tau}{l}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{\tau}{l}\right)^5+\cdots\right\}+c_2\tau^2+c_4\tau^4+\cdots$$
$$=\frac{k}{2}\operatorname{arctanh}(\tau/l)+c_2\tau^2+c_4\tau^4+\cdots\qquad(18.2)$$
$$J=\pi k(l-p),\quad \Theta=\pi k.$$

1) 反轉 如果 $c_2=c_4=\cdots=0$，也就是說 x 是 τ 的奇函数时，关于 τ 的半周期所作的积分 J 之值是关于全周期之值的一半。因此，在进行半周期时，映射是可实现的。但是 Θ，亦卽全周期間內 θ 之增量不能不是 2π 的倍数。因而，k 是 2, 4…等偶数。这是由于从可逆系所得的映射重复二回后成为单位映射的原故。

于是

$$x=k\operatorname{arctanh}(\tau/l)\quad(k=1,\ 2,\ \cdots),$$
$$f(x)=l^2-\tau^2=l^2\operatorname{sech}^2(x/k)=\left\{2l\Big/\left(\left(\frac{\tau}{a}\right)^{\frac{1}{k}}+\left(\frac{a}{\tau}\right)^{\frac{1}{k}}\right)\right\}^2,$$
$$n(\tau)=\sqrt{2(h-B(\tau))}=\frac{1}{\tau}\frac{2l}{\left(\frac{\tau}{a}\right)^{1/k}+\left(\frac{a}{\tau}\right)^{1/k}}.$$

如 $k=1$，就給出了 §10 Maxwell 的魚眼之折射率。对于一般的 k，映射是

$$r=a^2/r',$$
$$\theta=\theta'+k\pi \quad (k=1,\ 2,\ \cdots).$$

用直交坐标写出，就是

$$x=(-1)^k\frac{a^2x'}{x'^2+y'^2},\quad y=(-1)^k\frac{a^2y'}{x'^2+y'^2}.$$

2）关于原点的对称 x不是τ的奇函数时，要对τ取全周期，才可以实现映射。这时当$r=r'$，Θ是π的奇数倍，A'和它的象关于原点是对称的。在直交坐标下，写做

$$x=-x',\quad y=-y'.$$

作为(18.2)的特殊情况，命$x=k/2\cdot\log(l+\tau)$，得

$$f(x)=2l\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{2}{k}}-\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{4}{k}}.$$

$a=1$，$l=1$时折射率就是

$$n(r)=\frac{1}{r}\sqrt{f(x)}=\frac{1}{r}\sqrt{2r^{\frac{2}{k}}-r^{\frac{4}{k}}}.$$

$k=1$，$n=\sqrt{2-r^2}$时称为Luneberg透镜。$k=2$时，$n=\sqrt{\frac{2}{r}-1}$.

还有，以$x=-k/2\cdot\log(l+\tau)$，则有

$$f(x)=2l\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{2}{k}}-\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{4}{k}}.$$

上述这些映射，对于特殊的h才成立，对于任意的h不一定成立。

对于任意能量，映射成为可能的情况只有两种。当然，Hamiltonian 的形式不改变。下面就要说明这桩事。

首先，从$f(x)=2(h-B(r))r^2$在$x=0$，即$r=a$是极大的条件，得到

$$h=B(a)+\frac{1}{2}aB'(a),\quad l^2=a^3B'(a).$$

$B'(a)$是$B(a)$关于a的微分。代替取任意值的h把a考虑成参

数，把$f(x)$按x之乘幂展开，有

$$f(x)=l^2-a^2(3aB'+a^2B'')x^2-\left(5a^3B'-3a^4B''+\frac{1}{3}a^5B'''\right)x^3$$

$$-\left(\frac{57}{12}a^3B'+\frac{55}{12}a^4B''+\frac{7}{6}a^5B'''+\frac{1}{12}a^6B''''\right)x^4-\cdots.$$

以$f(x)=l^2-\tau^2$代入，按照(18.2)把x展开为τ的級数，就得出

$$a^2(3aB'+a^2B'')=(2l/k)^2.$$

这式对于任何a值都要成立。所以解出

$$B(a)=ca^{n-2},\quad n=4/k^2.$$

利用这項結果，再計算$f(x)$，就有

$$f(x)=l^2\left\{1-nx^2-\frac{n(n+2)}{3}x^3-\frac{n(n^2+2n+4)}{12}x^4-\cdots\right\}.$$

从此，得

$$x=\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\tau}{l}-\frac{n+2}{6n}\left(\frac{\tau}{l}\right)^2+\frac{n^2+7n+4}{36n\sqrt{n}}\left(\frac{\tau}{l}\right)^3-\cdots.$$

把它和(18.2)比較，从τ与τ^3的系数关系，得$n=4$与1.

$n=4$, $B(r)=\omega^2r^2/2$(ω：常数)时，

$$J=\oint\sqrt{2\left(h-\frac{\omega^2}{2}r^2\right)-\frac{p^2}{r^2}}\,dr=\pi\left(\frac{h}{\omega}-p\right),\quad p>0.$$

因此，

$$\Theta=-\frac{\partial J}{\partial p}=\pi,$$

$$T=\frac{\partial J}{\partial h}=\frac{\pi}{\omega}.$$

这正是諧振子，在§16之末曾提起过。

$n=1$, $B(r)=-c/r$时，

$$J=\oint\sqrt{2\left(h+\frac{c}{r}\right)-\frac{p^2}{r^2}}\,dr=2\pi\left(\frac{c}{\sqrt{-2h}}-p\right),\quad h<0,\quad p>0.$$

因此，

$$\Theta=2\pi,\quad T=\frac{2\pi c}{(-2h)^{3/2}}.$$

这时，A 的象重合于 A，是单位映射，从 A 发出再回到 A 的时間单凭粒子的能量就确定了。这是目前所知道的唯一关于 (ii) 的例証(§ 13)。

以上是就 2 維来讲的，对于具有球对称的力学系而論，只是維数增高一些，可以得出完全同样的結果。特别在 3 維情况中，如 $B(r)=-c/r$ 这样的位 (potential) 在靜电場里可以实現出来。

§ 19 有关非可逆系的映射

1）平行移动 利用平面上的直交坐标 x, y，当 Lagrange 函数 L 不含 y 时，那末它可以写成

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+B_1(x)\dot{x}+B_2(x)\dot{y}-B(x),$$

但由于 $B_1(x)\dot{x}dt=B_1(x)dx$ 是全微分的原故，这項可从 L 内除去。所以一般 L 是

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+b(x)\dot{y}-B(x).$$

于是，Hamiltonian 可以写做

$$H=\frac{1}{2}p_x^2+\frac{1}{2}(p_y-b(x))^2+B(x).$$

因为 $\dot{y}=p_y=p$ 是一个积分，所以 J 可写成

$$J=\oint\sqrt{2h-2B(x)-(b(x)-p)^2}dx.$$

要映射能实現，則 J 非是 p 的 1 次式不可。从这一条件要一般地决定 $B(x)$ 和 $b(x)$ 还做不到。作为特殊情况，設

$$B(x)=-\alpha x,\quad b(x)=\beta x,$$

則
$$J=2\pi\left(\frac{\alpha}{\beta^2}p+\frac{\alpha^2}{2\beta^3}+\frac{h}{\beta}\right).$$

于是，平行移动就实现了，得

$$Y=-\frac{\partial J}{\partial p}=-2\pi\frac{\alpha}{\beta^2},$$

$$T=\frac{\partial J}{\partial h}=\frac{2\pi}{\beta},$$

沿 y 方向的进展 Y 与周期 T 都和能量沒有关系。这是 § 13 的情况(i)。这种样子的場組合起来，亦即，均匀磁場(垂直于 xy 面)和与之直交的均匀电場之組合，Bleakney-Hipple 在质量分析器中曾利用了它，作为 2 維完全收束系得到很高的評价。

去掉 $B(x)$ 而只用 $b(x)$ 也能实現平行移动。这时

$$J=\oint\sqrt{2h-(b(x)-p)^2}dx.$$

利用关系 $b(x)=z$, $x=\varphi(z)$，把变数改换，則

$$J=\oint\sqrt{2h-(z-p)^2}\,\varphi'(z)dz.$$

再一次取 $z-p=u$ 作变数，則

$$J=\oint\sqrt{2h-u^2}\,\varphi'(p+u)du$$

$$=\oint\sqrt{2h-u^2}\left\{\varphi'(p)+u\varphi''(p)+\frac{u^2}{2}\varphi'''(p)+\cdots\right\}du$$

$$=2\pi\left\{h\varphi'(p)+\frac{1}{4}h^2\varphi'''(p)+\cdots\right\}.$$

积分是取在 x 被允許活动的区間上来回一次，关于 u 的积分是取在区間 $(-\sqrt{2h},\ \sqrt{2h})$ 上来回一次。对于任意的 h，要 J 成为 p 的 1 次式，則 $\varphi(p)$ 必須是 p 的 2 次式。于是 $x=\varphi(z)$ 一般可写成

$$x=\varphi(z)=\frac{\alpha}{2}(z+\beta)^2+\gamma,$$

移动 x 坐标的原点，并把常数 β 包含在 $z=b(x)$ 內，那末

$$x=\varphi(z)=\frac{\alpha}{2}z^2,\quad z=b(x)=\sqrt{\frac{2x}{\alpha}}.$$

这时， $J=2\pi ahp$,

因而 $Y=-2\pi ah,\quad T=2\pi ap,$

从这里就知道平行移动之距离 Y 与能量 h 成比例。由于这个原因，如利用这样的磁場，則荷电粒子的能量譜(energy spectral)画成与 y 軸平行的直綫。这是 §13 內(iii)的例証。

如把 $B(x)=\beta\sqrt{x}$ 添上去，則无法实現映射。

实現出 3 維的平行移动的一个例証，可举 Hamiltonian 为

$$2H=p_x^2+p_y^2+(p_z-\lambda x)^2+\lambda^2y^2-2\alpha x$$

的力学系。这时，除能量积分外，还有

$$p_z=p,$$

$$p_y^2+\lambda^2y^2=q$$

这样的积分存在。因此，J 是

$$J=\oint\sqrt{2h-p^2-q+2(\lambda p+\alpha)x-\lambda^2x^2}\,dx+\oint\sqrt{q-\lambda^2y^2}\,dy$$

$$=\pi\frac{(\lambda p+\alpha)^2+\lambda^2(2h-p^2-q)}{\lambda^3}+\pi\frac{q}{\lambda}$$

$$=\pi(2\alpha p+2\lambda h)/\lambda^2+\pi\alpha^2/\lambda^3.$$

这就是說，$\partial J/\partial q=0$, J 是 p 的 1 次式。因此，映射可实現出来，得

$$Z=-\frac{\partial J}{\partial p}=-\frac{2\pi\alpha}{\lambda^2},\quad T=\frac{2\pi}{\lambda}.$$

但这种力学系在靜电磁場內不能实現。在靜电磁場內，3 維的平行移动到底能不能实現出来，还未能解决。

2) 旋轉 关于平面上的极坐标 r, θ, 不含 θ 的 Lagrange 函数一般可写成

$$L=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+b(r)\dot{\theta}-B(r).$$

如果沒有和 $\dot{r}$ 成比例的項，則根据和 1) 同样的理由，就有

$$H=\frac{1}{2}p_r^2+\frac{1}{2r^2}(p_\theta-b(r))^2+B(r),$$

$$p_r=\dot{r},\quad p_\theta=r^2\dot{\theta}.$$

于是命 $p_\theta=p$，作用量 J 就是

$$J=\oint\sqrt{2h-2B(r)-\frac{1}{r^2}(b(r)-p)^2}\,dr.$$

首先就

$$B(r)=\alpha r^2,\quad b(r)=\beta r^2$$

試試看，

$$J=\oint\sqrt{2h-2\alpha r^2-(\beta r^2-p)^2r^{-2}}\,dr$$

$$=\pi\left(\frac{\beta p+h}{\sqrt{2\alpha+\beta^2}}-p\right),\quad p>0.$$

因此，旋轉是可能的。

$$\Theta=-\frac{\partial J}{\partial p}=\pi\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{2\alpha+\beta^2}}\right),$$

$$T=\frac{\partial J}{\partial h}=\frac{\pi}{\sqrt{2\alpha+\beta^2}}.$$

Θ 及 T 都与能量无关。这属于 §13 的 (i)。

其次以 $B(r)=0$，只由 $b(r)$ 来实现旋轉。把

$$J=\oint\sqrt{2h-\frac{(b(r)-p)^2}{r^2}}\,dr$$

展开成 h 之乘冪。命

$$b(r)-p=r\zeta,$$

以及

$$b(r)=z,\quad r=\varphi(z),$$

$b(x)$ 与 $\varphi(z)$ 互为反函数。于是

$$z=p+r\zeta=p+\zeta\varphi(z).$$

利用关于反函数展开的 Lagrange 定理，z 展开成 ζ 的乘冪时，得

$$z=p+\zeta\varphi(p)+\frac{\zeta^2}{2!}(\varphi(p)^2)'+\frac{\zeta^3}{3!}(\varphi(p)^3)''+\cdots.$$

用它再把 $r=\varphi(z)$ 展开成 ζ 的乘冪

$$r=\varphi(z)=\varphi(p)+\varphi(p)\varphi'(p)\zeta+\left(\varphi\varphi'^2+\frac{\varphi\varphi''}{2}\right)\zeta^2$$
$$+\left(\frac{\varphi'(\varphi^3)''}{3!}+\frac{\varphi''\varphi(\varphi^2)'}{2!}+\frac{\varphi^3\varphi'''}{3!}\right)\zeta^3+\cdots.$$

从此求出 dr 再計算 J,

$$J=\oint\sqrt{2h-\zeta^2}\,dr=2\pi\Big[\varphi(p)\varphi'(p)h$$
$$+\frac{3}{2}\left(\frac{\varphi'(\varphi^3)''}{3!}+\frac{\varphi''\varphi(\varphi^2)'}{2!}+\frac{\varphi^3\varphi'''}{3!}\right)h^2+\cdots\Big].$$

要使此式对于任意的 h 成为 p 的 1 次式，則首先 h 的系数不能不是 p 的 1 次式。于是命

$$\varphi(p)\varphi'(p)=\alpha p+\beta,$$

則
$$\varphi(p)^2=\alpha p^2+2\beta p+\gamma.$$

利用这个来計算 h^2 的系数，它仍是 p 的 1 次式。这里，把 r 与 $z=b(r)$ 的关系取做

$$r=\varphi(z)=\sqrt{\alpha z^2+2\beta z+\gamma}$$

来計算 J 試試看。由于 β 可以并入 $b(r)$ 里，所以命它等于 0，更假定 $\gamma<0$, $\alpha>0$, 以

$$r=\sqrt{\alpha(z^2-\sigma^2)},\quad \sigma=\sqrt{(-\gamma/\alpha)}.$$

那末，
$$J=\oint\sqrt{2h\alpha(z^2-\sigma^2)-(z-p)^2}\,\frac{z\,dz}{z^2-\sigma^2}.$$

根号中 z 的 2 次式之零点設为 z_1, z_2 $(z_1<z_2)$。可以看出，如非 $\sigma<z_1<z_2$, 則积分沒有意义。考虑 z 的复平面，这个积分可以換为繞 z_1, z_2 一周而成的曲綫 C 上的积分。这时，在綫段 z_1z_2 的下側，根号式非是实数不可。这个被积分函数(即根号式)在 C 外以 σ 及 $-\sigma$ 作为一阶极点，以 ∞ 作为二阶极点。在 σ, $-\sigma$, ∞ 的留数記为 J_σ, $J_{-\sigma}$, J_∞, 則有

$$J=J_\infty-J_\sigma-J_{-\sigma}.$$

把它們分别地計算出来，有

$$J_\infty = 2\pi p \frac{\sqrt{|1-2h\alpha|}}{1-2h\alpha}, \quad J_\sigma = \pi|p-\sigma|, \quad J_{-\sigma} = \pi|p+\sigma|.$$

从而　$J = \dfrac{2\pi p}{\sqrt{1-2h\alpha}} - \pi|p-\sigma| - \pi|p+\sigma|, \quad 1-2h\alpha>0.$

J 仍是 p 的 1 次式，所以映射能实现出来。这时

$$\Theta = -\frac{\partial J}{\partial p} = 2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-2h\alpha}}\right),$$

$$T' = \frac{\partial J}{\partial h} = \frac{2\pi p\alpha}{(1-2h\alpha)^{3/2}},$$

旋轉角 Θ 与能量有关系。

$\gamma=0$, $\sigma=0$ 时，$b(r)=r\sqrt{\alpha}$，这时就是加上 $B(r)=-\beta/r$，J 之值不起变化。因此，映射还是可能的。$\sigma=0$ 时的路綫如图 19.1 所画的那样。

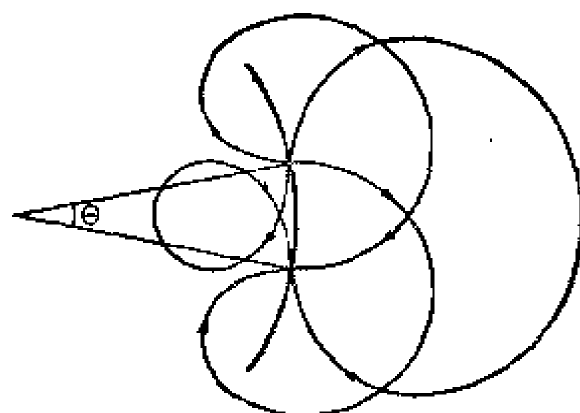


图　19.1

空間内与軸对称的力学系有关的旋轉可举出一个例証，就是和在圓柱坐标 r, θ, z 中 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \beta r^2\dot{\theta} - \frac{\beta^2}{6}(2z^2 - r^2)$$

的力学系有关的旋轉。Hamiltonian 是

$$H = \frac{1}{2}p_r^2 + \frac{1}{2r^2}(p_\theta - \beta r^2)^2 + \frac{1}{2}p_z^2 + \frac{\beta^2}{6}(2z^2 - r^2).$$

这时除 $p_\theta = p$ 外还存在一个积分

$$\frac{1}{2}p_z^2 + \frac{1}{3}\beta^2 z^2 = q.$$

J 可写成如下形式，关于 z 是取一次来回，关于 r 是取二次来回。

$$J = \oint\sqrt{2q - \frac{2}{3}\beta^2 z^2}\,dz + 2\oint\sqrt{2h - 2q + \frac{1}{3}\beta^2 r^2 - \frac{1}{r^2}(p-\beta r^2)^2}\,dr$$

$$= 2\pi\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{h+\beta p}{\beta} - p\right).$$

因此 $\Theta=2\pi\left(1-\sqrt{\frac{3}{2}}\right),\quad T=\frac{2\pi}{\beta}\sqrt{\frac{3}{2}},$

旋轉可以实現。这是§13,(i)的例証。这种力学系是根据下节的方法才发見的。

从 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2)+\beta r^2\dot{\theta}-\frac{\beta^2}{3}(2z^2-r^2)$$

的力学系也同样地得出旋轉。这时，z 与 r 都是进行一次来回，得

$$J=\pi\left(\sqrt{3}\,\frac{p\beta+h}{\beta}-p\right),$$

旋轉角与周期是

$$\Theta=\pi(1-\sqrt{3}),\quad T=\pi\sqrt{3}/\beta.$$

旋轉角因能量而改变的例子是在球面坐标 r,θ,φ 下，Hamiltonian H 可写为

$$2H=p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{(p_\varphi-\beta r\sin^2\theta)^2}{r^2\sin^2\theta}-\beta^2\sin^2\theta$$

的力学系。这时

$$J=2\pi\left\{\frac{\beta p_\varphi}{\sqrt{-2h}}-p_\varphi\right\},$$

从而，旋轉角 Φ 是

$$\Phi=2\pi\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{-2h}}\right),$$

这的确是因能量面变化的。但这种力学系在静电磁場里不能实現出来。

§20 位置与运动量之变换

試求这种力学系，它在某一时刻粒子之位置与运动量为 x_r' 与 y_r'，在另一时刻的位置与运动量为 x_r 与 y_r，x_r 由 $y_1',\cdots,y_n'$ 而 y_r 由 $x_1',\cdots,x_n'$ 唯一决定。这时，以 x_r'，x_r 作为独立变数，典型变换

写成

$$dV = y_r dx_r - y_r dx'_r .$$

这样，y'_r 只是 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数，因而 V 可写成

$$V = -y'_r(x)x'_r + f(x).$$

但是，由于 $y_r = \partial V/\partial x_r$ 必须是只与 $x'_1, \cdots, x'_n$ 有关的函数，所以 $y'_r(x)$ 不能不是 x 的1次式。因此，可写成

$$\left.\begin{aligned} &y'_s = c_{sr}x_r, \ \det|c_{sr}| \neq 0, \\ &y_r = -c_{sr}x'_s . \end{aligned}\right\} \tag{20.1}$$

实现这种变换的力学系，其 Hamiltonian 可写成

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(y_r - B_r(x))(y_r - B_r(x)) + B(x) \\ &= \frac{1}{2} y_r y_r - y_r B_r(x) + \Gamma(x), \end{aligned} \tag{20.2}$$

这里

$$\Gamma(x) = B(x) + \frac{1}{2} B_r(x) B_r(x). \tag{20.3}$$

在上述变换下，由 Hamiltonian H 之不变性来求 $B_r(x)$，$\Gamma(x)$ 所应受的条件。从 $H(x', y') = H(x, y)$ 得

$$\begin{aligned} &\sum_r (c_{rs}x_s)^2 - 2c_{rs}x_s B_r(x') + 2\Gamma(x') \\ &= \sum_r (x'_s c_{sr})^2 + 2x'_s c_{sr} B_r(x) + 2\Gamma(x). \end{aligned} \tag{20.4}$$

由于左边关于 x 是2次式，右边关于它也必须是2次式。因此，$B_r(x)$，$\Gamma(x)$ 是2次式或1次式。把坐标原点适当地移动一下，从 $\Gamma(x)$ 内把1次项除掉。更因为 $\Gamma(x)$ 以及 $B_r(x)$ 内的常数项和运动没有关系，可使之为0。于是

$$\Gamma(0) = 0, \ B_r(0) = 0.$$

在(20.4)内以 $x'_r = 0$，即得

$$2\Gamma(x) = \sum_r (c_{rs}x_s)^2, \tag{20.5}$$

这就是說，$\Gamma(x)$是正值2次形式。其次以$x_r=0$代入，

$$2\Gamma(x') = \sum_r (x'_s c_{sr})^2. \tag{20.6}$$

于是在(20.4)内只剩下

$$-c_{rs}x_s B_r(x') = x'_s c_{sr} B_r(x) \tag{20.7}$$

这样一个关系。因此，$B_r(x)$是x_r的1次式。但是，即使从$B_r(x)dx_r$把全微分这項条件除去，对Hamilton原理与运动方程也无影响。此时，可根据$B_r(x)dx_r - 1/2d(B_r(x)x_r) = B'_r(x)dx_r$引进新的$B'_r(x)$。这个$B'_r$仍改写成$B_r(x)$而以

$$B_r(x) = \beta_{rs}x_s,$$

矩陣$(\beta_{rs}) = \beta$是反称矩陣。如以$(c_{rs}) = C$，则B_r应受的条件是

$$\beta C = C\beta. \tag{20.8}$$

如以$2\Gamma(x) = \gamma_{rs}x_r x_s$，$(\gamma_{rs}) = \Gamma$，则关于$\Gamma$的两个条件是

$$\Gamma = C^* C, \tag{20.9}$$

$$\Gamma = CC^*. \tag{20.10}$$

在3維情况下，所謂$B_r(x)$是1次式意味着磁場是均匀場。这个磁場的方向取作x_3軸，磁場的强度設为2ω，則可設

$$B_1(x) = \omega x_2, \quad B_2(x) = -\omega x_1, \quad B_3(x) = 0.$$

因而

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于$C = \|c_{rs}\|$和β是可換的，一般可写为

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ -c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix},$$

从条件$C^*C = CC^* = \Gamma$，得出$c_{12}(c_{11} - c_{22}) = 0$，于是$\Gamma$的形式是

$$\Gamma=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2 & 0\\ 0 & 0 & \nu^2\end{pmatrix}.$$

因此，Hamiltonian 可写为

$$H=\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-\omega(y_1x_2-y_2x_1)+\frac{1}{2}(\lambda^2x_1^2+\lambda^2x_2^2+\nu^2x_3^2).$$

現在把变数由 x_i, y_i 按照規定

$$\xi_1=x_1\cos\omega t+x_2\sin\omega t,\ \xi_2=-x_1\sin\omega t+x_2\cos\omega t,\ \xi_3=x_3$$

換成 ξ_i, η_i, 把 x_i, η_i 取作独立变数，則 W 可写为

$$W=\eta_1(x_1\cos\omega t+x_2\sin\omega t)+\eta_2(-x_1\sin\omega t+x_2\cos\omega t)+\eta_3x_3.$$

于是，从

$$dW=y_idx_i+\xi_id\eta_i+(\partial W/\partial t)dt$$

就得出

$$\eta_1=y_1\cos\omega t+y_2\sin\omega t,\quad \eta_2=-y_1\sin\omega t+y_2\cos\omega t,\quad \eta_3=y_3,$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\omega(\eta_1\xi_2-\eta_2\xi_1).$$

因而，Lagrange 形式可根据

$$\begin{aligned}\omega_t&=y_idx_i-Hdt=dW-\xi_id\eta_i-\partial W/\partial t\cdot dt-Hdt\\&=d(W-\xi_i\eta_i)+\eta_id\xi_i-(H+\partial W/\partial t)dt\end{aligned}$$

变形，新的 Hamiltonian 就写成

$$H+\frac{\delta W}{\partial t}=\frac{1}{2}(\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2)+\frac{1}{2}(\lambda^2\xi_1^2+\lambda^2\xi_2^2+\nu^2\xi_3^2).$$

这种变換是从原来的坐标系繞 x_3 軸旋轉一个角速度 ω 变成新坐标系的变換。

$\lambda=\nu$ 时，这是各向同性諧振子。設 $t=0$ 时的值为 ξ_i', η_i'，則运动方程的解是：

$$\xi_i=\xi_i'\cos\lambda t+\frac{1}{\lambda}\eta_i'\sin\lambda t,$$

$$\eta_i = -\lambda\xi'_i \sin\lambda t + \eta'_i \cos\lambda t,$$

因此，当 $\lambda t = \pi/2$ 时，

$$\xi_i = \frac{1}{\lambda}\eta'_i, \quad \eta_i = -\lambda\xi'_i,$$

这就实现了位置与运动量的变换。如用原来坐标系来写，则的确是 $y'_s = c_{sr}x_r$，C 为

$$C = (c_{sr}) = \begin{pmatrix} \lambda\cos\Phi & \lambda\sin\Phi & 0 \\ -\lambda\sin\Phi & \lambda\cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \Phi = \frac{\omega\pi}{2\lambda}.$$

这种力学系要在静电磁場内实现出来，则 $B(x)$ 非满足 Laplace 方程不可。但由于

$$B(x) = \Gamma(x) - 1/2\cdot B_r(x)B_r(x) = \Gamma(x) - 1/2\cdot\omega^2(x_1^2 + x_2^2),$$

故必須

$$\mathrm{tr}\Gamma = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} = 2\omega^2.$$

由此，不能不有 $3\lambda^2 = 2\omega^2$. 从而，$\Phi = \pi\sqrt{3/8}$. 这种力学系的 Hamiltonian 如用圓柱坐标来写就得到上节末提到的形式。

能实现位置与运动量相交换的力学系当然能实现完全結象。

参考文献

[1] G. D. Birkhoff: Dynamical Systems (Amer. Math. Soc., New York, 1927).

[2] E. Cartan: Leçons sur les Invariants Intégraux (Hermann, Paris, 1922).

[3] H. Poincaré: Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste I, II, III (Gauthier-Villars, Paris, 1892).

§12 引用的話載于卷 I, p. 82.

[4] H. Weyl: Classical Groups (Princeton Univ., Princeton, 1946).

[5] M. Born: Optik (Springer, Berlin, 1933).

[6] C. Caratheodory: Geometrische Optik (Springer, Berlin, 1937).

[7] M. Herzberger: Strahlenoptik (Springer, Berlin, 1931).

[8] J. L. Synge: Geometrical Optics (Cambridge Univ., 1937).

[9] 豊田利幸：光学(広文館，东京，1949).

附記 在§2里注意到了如下的事实，即使对 $Ldt=\omega_0$ 加上一个全微分，Hamilton 原理，运动方程(2.10)，(2.11)并不受任何影响。由于这个事实常常使用到，所以特别提出来。

§18，§19，§20 各节的例証除提名的以外，均采自作者的文章。